

Sistemas Não-Lineares

Análise e Controle

Universidade do Brasil — U.F.R.J.
Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia
Programa de Engenharia Elétrica

Sistemas Não-Lineares: Análise e Controle

Liu HSU
<liu@coep.ufrj.br>

Sumário

1	Introdução aos Sistemas Não-Lineares de Controle	1
2	Equações Diferenciais Ordinárias	9
3	Análise Qualitativa	21
4	Sistemas Lineares por Partes	43
5	Teoria de Estabilidade	49
6	Passividade e Estabilidade Absoluta	69
7	Projeto de Sistemas de Não-Lineares de Controle	81
8	Estrutura Variável por Modos Deslizantes	101
9	Complementos	103

1

Introdução aos Sistemas Não-Lineares de Controle

Na teoria clássica de controle supõe-se que as plantas são representáveis por equações diferenciais lineares e que os controladores também são lineares. Entretanto, na natureza, os sistemas são a rigor **não-lineares**. Para nos convenceremos deste fato basta perceber que linhas perfeitamente retas ou amplificadores perfeitamente lineares não existem no mundo real. Além disso, os controladores criados pela própria natureza são também não-lineares. Exemplos eloqüentes são encontrados no próprio ser humano e nos demais seres vivos. Assim, o controle de movimentos, de temperatura, de concentrações químicas, todos têm características conhecidamente não-lineares. As redes neurais subjacentes aos sistemas de controle inteligente inspirados pelas teorias sobre a inteligência humana são essencialmente não-lineares¹.

A teoria de sistemas lineares de controle é, de longe muito mais completa e madura do que a de sistemas não-lineares. A sua utilidade é inconstestável e tem sido a que mais se aplica na prática pelas seguintes razões principais:

- A teoria é mais completa e a compreensão dos fenômenos lineares é bem mais fácil;
- A implementação prática era geralmente mais fácil, pelo menos antes da era dos microprocessadores e das técnicas digitais;
- Muitos sistemas são bem aproximados por modelos lineares, pelo menos em torno de um ponto de operação.

1.1 Motivação para o Estudo de Sistemas Não-Lineares

A seguir enumeramos alguns motivos para se estudar sistemas dinâmicos não lineares.

1. *Simplicidade*: Desde as fases iniciais do desenvolvimento da área de controle automático já eram utilizados sistemas não-lineares de controle devido à simplicidade de implementação. Como exemplos clássicos citamos: controle a relé de temperatura, de nível, etc. A motivação aqui é a simplicidade. Um simples comparador acionando um relé é muito mais simples do que um controlador linear PID (Proporcional-Integral-Derivativo) comandando uma fonte linear de potência. é também muito mais simples realizar fontes de potência PWM do que um amplificador linear de potência. Como exemplo bem conhecido citamos o controle chaveado de máquinas elétricas. Simplicidade é portanto um dos motivos para se utilizar controle não-linear. Cabe notar entretanto que tais sistemas são mais difíceis de analisar pois envolvem características essencialmente não-lineares (descontínuas) que não podem ser diretamente aproximadas por um modelo linear.

¹ Trabalhos em redes artificiais, comumente chamadas de *redes neurais*, têm sido motivadas pela forma com a qual o cérebro humano reconhece padrões. Esta forma é totalmente diferente dos computadores digitais convencionais, pois o cérebro humano pode ser considerado um computador paralelo não-linear altamente complexo. Veja referência [?].

2. *Desempenho*: Outra razão importante para a possibilidade de melhorar o desempenho do sistema com controladores não-lineares já foi demonstrada amplamente tanto na teoria como na prática. Podemos citar alguns exemplos:
 - (a) Controle em tempo mínimo (*bang-bang*) resultante do princípio do máximo de Pontryagin;
 - (b) Controle por modos deslizantes (estrutura variável);
 - (c) Controle adaptativo;
 - (d) Controle inteligente utilizando técnicas de “Soft Computing” — Veja referência [?];
 - (e) Controle utilizando o projeto por “backstepping”.
3. *Não-linearidades intrínsecas*: A planta não pode ser adequadamente aproximada por um modelo linear por exemplo nas seguintes situações:
 - (a) Presença de forte atrito seco;
 - (b) Sistemas de potência (geração de energia elétrica) em situações transitórias de grande amplitude com a possibilidade de ocorrência de apagões (*black-outs*);
 - (c) Robôs manipuladores de alta velocidade (A figura 1.1 mostra exemplos de veículos submarinos manipuladores);
 - (d) Sistemas biológicos;
 - (e) Atuadores e sensores com baixo nível de saturação.
4. *Microprocessadores*: Com o advento da tecnologia digital e de poderosos microcontroladores praticamente não existe mais a dificuldade de implementação de algoritmos muito mais complexos, lineares ou não-lineares. Em suma, não existe uma barreira tecnológica para implementar estratégias não-lineares de controle, ou de técnicas complexas combinando a teoria de sistemas a eventos discretos com sistemas a eventos contínuos (sistemas “híbridos”) que levam a sistemas chaveados e, portanto, não-lineares. Processos híbridos ocorrem com grande frequência na indústria e até há pouco tempo encontrados de maneira pouco sistemática.
5. *Campo aberto de pesquisa*: A teoria de sistemas não-lineares de controle, mesmo restrita a classes de sistemas especiais porém relevantes ainda carece de muito desenvolvimento, apesar dos progressos significativos testemunhados pela comunidade de controle nas três últimas décadas.

1.2 Características de Sistemas Não-lineares

A representação básica de um sistema linear é dada pela sua equação linear de estado, tradicionalmente escrita na forma padrão apresentada em (1.1) onde o sobrepondo representa diferenciação em relação ao tempo na notação de Newton onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

A propriedade essencial de um sistema linear é o princípio da superposição ilustrado na figura 1.2. Esta propriedade é que permite um tratamento tão completo dos sistemas lineares. Os sistemas não-lineares são aqueles que não são representáveis pela equação (1.1) e que não obedecem ao princípio da superposição.

A perda da propriedade de superposição torna os sistemas não-lineares muito mais complexos e ricos em comportamentos e possibilidades. Vejamos alguns comportamentos tipicamente não-lineares.



Figura 1.1. Dois modelos de veículo submarino (ROV) com braço manipulador.

1. **Escape em tempo finito:** A solução $x(t)$ da equação diferencial dada por $\dot{x}(t) = x^2(t)$ tende a infinito em um instante de tempo finito. Em linguagem matemática, temos:

$$\lim_{t \rightarrow t_{\infty} < \infty} x(t) \rightarrow \infty$$

2. **Pontos de equilíbrio múltiplos e isolados:** Um sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tem um só ponto de equilíbrio (definido por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ como solução única do sistema homogêneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$) ou todo um subespaço de equilíbrio correspondente ao espaço nulo de \mathbf{A} , quando $|\mathbf{A}| \neq 0$ ou $|\mathbf{A}| = 0$, respectivamente. Um sistema não-linear pode ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados, isto é, pontos de equilíbrio em cuja vizinhança mais próxima não se encontra nenhum outro. Um exemplo é o pêndulo cuja dinâmica é dada pelas equações diferenciais acopladas (1.2) cujos pontos de equilíbrio são em número infinito e isolados conforme (1.3).

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -K \sin(\theta) \end{cases} \quad (1.2)$$

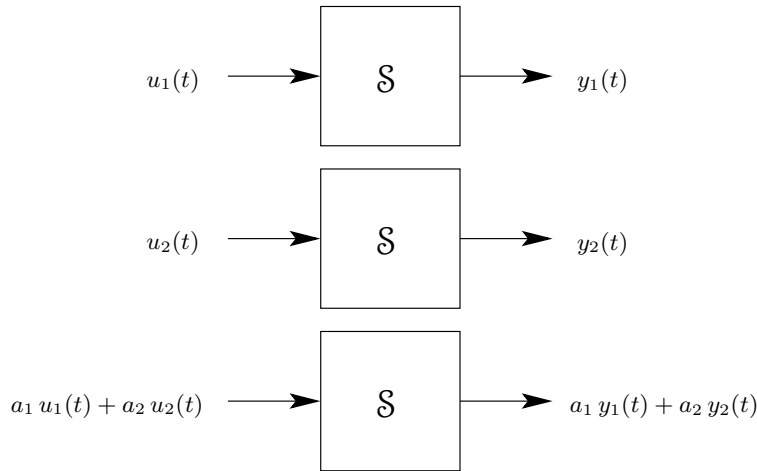


Figura 1.2. Ilustração do princípio da superposição.

$$\begin{cases} \theta = k\pi & \therefore k \in \mathbb{N} \\ \omega = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Mais precisamente, o pêndulo de dinâmica representada pela equação (1.2) possui os seguintes pontos de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -2\pi \end{bmatrix}; \dots \right\} \quad (1.4)$$

É claro que se k for par temos pontos de equilíbrio “estáveis” e se k for ímpar, tais pontos são “instáveis”. O conceito de estabilidade, aqui tomado no sentido intuitivo, será estabelecido formalmente no capítulo 5.

3. **A perda da propriedade de superposição:** Vejamos como o princípio da superposição falha para o caso não-linear com um modelo de veículo submarino (simplificado) que modela apenas a interação de uma força inercial $\dot{\nu}$, de uma força de propulsão x e de uma força de arrasto que é não-linear $|\nu|\nu$ onde ν é a velocidade do veículo.

$$\dot{\nu} + |\nu|\nu = u \quad (1.5)$$

A figura 1.3 apresenta a resposta a um degrau unitário e a um degrau dez vezes maior zerados após 5 segundos. Observa-se facilmente que o princípio da superposição falha pois a resposta do sistema a um pulso de largura fixa não é proporcional à amplitude do pulso.

4. **Círcos-limite (soluções periódicas autônomas e isoladas):** Sistemas lineares podem exibir oscilações periódicas autônomas, isto é, sem serem forçada, pelo menos idealmente. Um bom exemplo é o sistema mola-massa sem atrito. Entretanto não há amplitude preferencial. As oscilações não são “isoladas” (de maneira similar aos pontos de equilíbrio de sistemas lineares). Já no caso de sistemas não-lineares podemos ter soluções periódicas denominadas “auto-oscilações” que ocorrem sem nenhuma exatidão periódica externa e que, mesmo quando perturbadas, voltam à amplitude inicial com a mesma frequência após um transitório pós-distúrbio. São oscilações isoladas denominadas círcos-limite. Um exemplo clássico é o oscilador de Van der Pol, cuja equação

diferencial é dada por (1.6).

$$m \ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad (1.6)$$

A equação (1.6) modela um circuito RLC com um resistor não-linear utilizado como um oscilador eletrônico. Note o amortecimento não-linear que é positivo para $|x| > 1$ e negativo para $|x| < 1$. Assim é de se esperar que uma oscilação se produza.

5. **Estabilidade não-global:** Sistemas lineares quando estáveis assintoticamente em torno da origem, o são também globalmente assintoticamente estáveis, isto é $x(t)$ tende para a origem a partir de qualquer condição inicial. Um sistema não-linear pode ter um domínio de estabilidade limitado. Se iniciado fora de tal domínio, o sistema não retorna ao ponto de equilíbrio de interesse. é o caso de um sistema de geração elétrica que, se for muito perturbado com relação ao ponto normal de operação (exemplo: quando ocorre um curto-circuito e duração longa), não recupera um ponto estável de operação resultando em um “apagão” (blackout). A determinação do domínio de estabilidade é de grande interesse para o planejamento do sistema de distribuição para evitar tais acidentes de graves conseqüências sócio-econômicas.

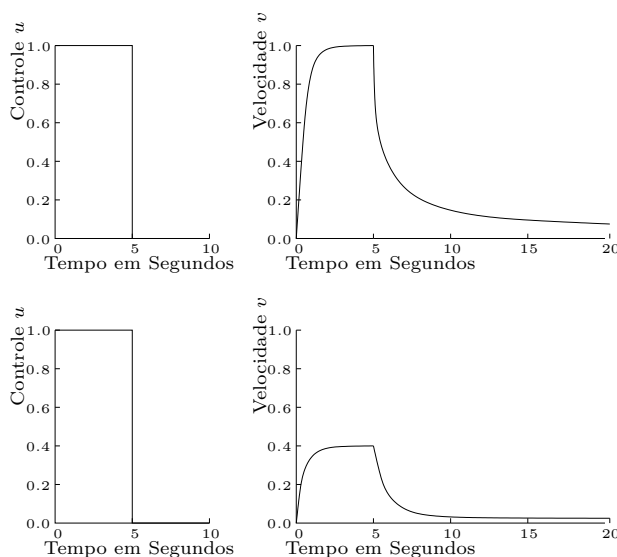


Figura 1.3. Respostas do robô submarino a pulsos de propulsão de diferentes amplitudes

6. **Sub-harmônicas e oscilações quase-periódicas:** Um sistema linear estável, quando excitado por um sinal senoidal de freqüência ω , apresenta como resposta de regime um sinal senoidal de mesma freqüência, apenas com amplitude e fase diferentes da entrada. Em contraste, um sistema não-linear nas mesmas condições pode apresentar como resposta, além de um sinal na freqüência da excitação, harmônicas e sub-harmônicas dessa freqüência. Ao excitar o oscilador de Van der Pol com um sinal senoidal é intuitivo esperar que, se a excitação for pequena, a auto-oscilação predomine e que o sistema oscile na sua freqüência natural. Ao se aumentar a excitação, aparecem as duas freqüências, a natural e a de excitação gerando um batimento que é conhecido também como oscilação quase periódica. Quando a excitação é suficientemente grande, ocorre a sincronização e o oscilador passa a sincronizar com a excitação externa, isto é, oscila na freqüência de excitação apenas.

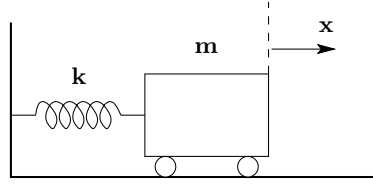


Figura 1.4. Sistema mola–massa sem atrito

7. **Caos determinístico:** Sabe-se hoje em dia que sistemas não-lineares determinísticos podem exibir comportamentos tão complexos que se assemelham a sistemas probabilísticos ou aleatórios. Sistemas autônomos (invariantes no tempo) de segunda ordem foram totalmente caracterizados pela teoria de Poincaré–Bendixson e não apresentam fenômenos caóticos embora possam exibir ciclos-limite e múltiplos pontos e equilíbrio formando uma estrutura bastante complexa. Excite-se um sistema não-linear com uma oscilação periódica e tudo muda de figura. Por exemplo: O sistema (1.7) pode representar uma estrutura mecânica levemente amortecida sujeita a grandes deformações.

$$\ddot{x}(t) + 0,1 \dot{x}(t) + x^5(t) = 6 \sin(t) \quad (1.7)$$

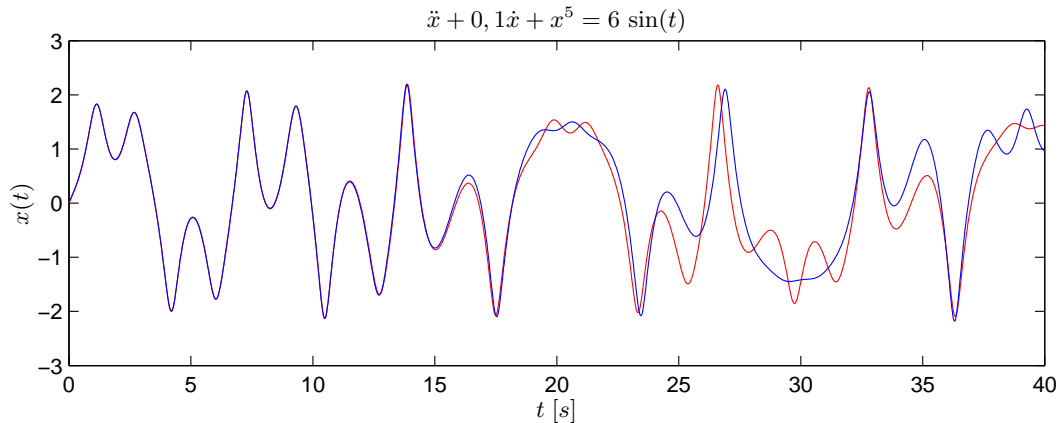


Figura 1.5. Fenômeno de caos determinístico.

Na figura 1.5 vê-se que após 25 segundos duas soluções iniciadas muito próximas, rapidamente divergem. O que caracteriza um comportamento caótico é a sua extrema sensibilidade às condições iniciais e conseqüentemente fica inviável utilizar um modelo matemático com tal comportamento para prever a saída em um instante futuro. Infelizmente tais fenômenos ocorrem justamente em modelos ligados com previsões meteorológicas, como é o caso das famosas equações de Lorenz que geram **atratores estranhos** de características caóticas. Alguns matemáticos propuseram a ligação do fenômeno de turbulência com o comportamento caótico de sistemas não-lineares. Sistemas discretos no tempo do tipo $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ com $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ podem apresentar comportamento caótico a partir de $n = 2$.

A título ilustrativo, apresentamos alguns exemplos desenvolvidos em 1974 por J. Bernusson, L. Hsu e C. Mira, que estão descritos em [J. Bernusson, “Contribution à l’Etude des Solutions de Récurrences non Linéaires — Application à l’Etude de Certains Systèmes à Modulation”, Thèse de “Docteur des Sciences Physiques”, N°. 596, Université Paul Sabatier, Avril 1974].

1.2.1 Exemplos de Sistemas Não-lineares

- O pêndulo.
- O circuito com diodo-túnel (bi-estável).
- O sistema mola-massa com atrito de Coulomb
- O oscilador a resistência negativa.
- Uma rede neural.
- Controle adaptativo.

Veja referência [?], no capítulo 1, páginas 5–23.

1.2.2 Não-linearidades Comuns

- Relé com e sem ciclo de histerese, figura 1.6;
- Jogo de engrenagem, figura 1.7.
- Curva.

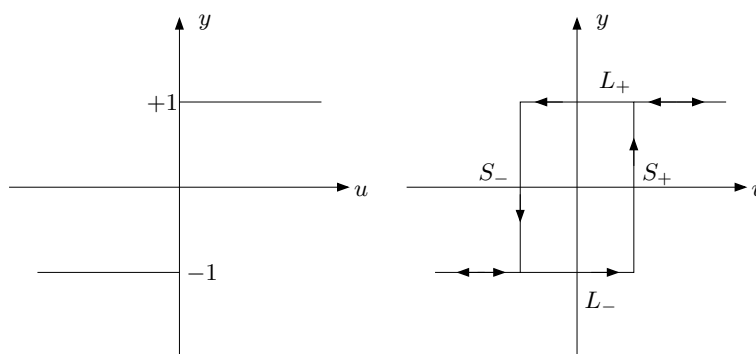


Figura 1.6. Gráfico de Relé com e sem ciclo de histerese.

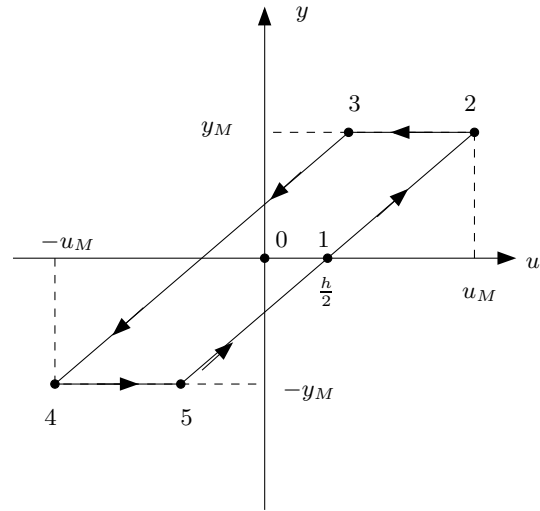


Figura 1.7. Característica entrada-saída de um sistema de rodas dentadas com folga.

2

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistemas dinâmicos em tempo contínuo são descritos por equações diferenciais ordinárias ou a derivadas parciais. Consideramos apenas o primeiro caso.

Este capítulo apresenta conceitos e propriedades fundamentais de equações diferenciais ordinárias (EDO) necessárias para o curso. Maiores detalhes podem ser encontrados em [?].

2.1 Problemas do Valor Inicial

2.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (isto é, aberto, conexo e não vazio). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida e contínua em D . Seja $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, a derivada de $x(t)$ com respeito ao tempo t . Chamamos (2.1) de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = f(t, x) \end{cases} \quad (2.1)$$

Por solução da equação (2.1), em um intervalo aberto $J = t \in \mathbb{R} : a < t < b$, entendemos uma função diferenciável $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in J$$

E que, além disso, satisfaça (2.1), isto é:

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J$$

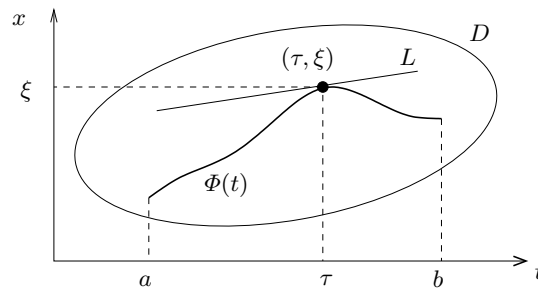


Figura 2.1. Solução de um problema de valor inicial para $t \in J = (a, b)$, onde $m = f(\tau, \varphi(\tau))$ é a inclinação da tangente L .

Definição 2.1: (Problema do valor inicial) Dado $(\tau, \xi) \in D$, o problema de valor inicial para a equação (2.1) é:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (2.2)$$

A função φ é uma solução de (2.2) se φ é uma solução de (2.1) em J ($\tau \in J$) e $\varphi(\tau) = \xi$.

A equação (2.3) é denominada de **Forma Integral Equivalente**.

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (2.3)$$

▲

Exercício 2.1: Prove a equivalência da equação (2.3).

Exercício 2.2: Prove a propriedade do caso autônomo $\dot{x} = f(x)$ de que, se $\varphi(t)$ é solução, então também $\varphi(t + c)$ é solução, para qualquer constante c .

2.1.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Seja $x \in \mathbb{R}^n$; $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Em forma compacta o sistema de equações diferenciais ordinárias continua sendo escrito na forma simplificada da equação (2.1). Escrevendo-a em forma expandida, temos a equação (2.4).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Definição 2.2: Seja $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) \in D$. Então, o problema do valor inicial associado a (2.4) é (2.5).

$$\begin{cases} \dot{x}_i(\tau) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_i(\tau) = \xi_i \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

▲

Um conjunto de funções $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma solução de (2.5) em algum intervalo J , $\tau \in J$ se $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ for solução de (2.4) neste intervalo e se a condição (2.6) for atendida.

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Observação 2.1: A forma compacta de (2.5) é a mesma de (2.2), apenas que $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. ♦

De acordo com a equação (2.7), a derivada de um vetor é a derivada de cada um de seus elementos.

$$\frac{dx(t)}{dt} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$f(x, t) \triangleq \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\varphi(t) \triangleq \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.3 Nomenclatura Complementar

- Movimento através de (τ, ξ) : $\{(t, \varphi(t)) : t \in J\}$.
- Trajetória ou órbita através de (τ, ξ) : $C(\xi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in J\}$
- Semi-trajetória ou semi-órbita positiva ou negativa:

$$C^+(\xi) = \{(t, \varphi(t)) : t \geq \tau\}$$

$$C^-(\xi) = \{(t, \varphi(t)) : t \leq \tau\}$$

2.1.4 Classificação de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

1. Sistema autônomo: $\dot{x} = f(x)$
2. Sistema não-autônomo: $\dot{x} = f(x, t)$
3. Sistema periódico: $\dot{x} = f(x, t + T)$. Exemplo: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
4. Sistema homogêneo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}$
5. Sistema linear e periódico: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} = \mathbf{A}(t + T) \mathbf{x}$
6. Sistema não homogêneo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + g(t)$
7. Sistema linear, autônomo e homogêneo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$

Observação 2.2: O sistema não-autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo conforme (2.10), mas isso nem sempre simplifica.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ \dot{z} = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

◆

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias de n -ésima Ordem

A equação (2.11) apresenta de forma genérica uma equação diferencial ordinária de ordem n .

$$y^{(n)} = h(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.11)$$

Definição 2.3: Uma solução de (2.11) é uma função real φ que é definida em um intervalo de t , $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com n derivadas contínuas em J e que satisfaz as duas condições apresentadas em (2.12).

$$\begin{cases} (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{n-1}(t)) \in D & \forall t \in J \\ \varphi^{(n)}(t) = h(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{n-1}(t)) & \forall t \in J \end{cases} \quad (2.12)$$

▲

Fato 2.1: A teoria de equações diferenciais de ordem n reduz-se a n sistemas de equações diferenciais de primeira ordem conforme (2.13). ◊

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = h(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.13)$$

Exercício 2.3: Prove o fato 2.1 mostrando que toda solução de (2.13) é solução de (2.11) e vice-versa.

2.3 Teoria Fundamental

O objetivo desta seção é apresentar os resultados básicos sobre existência, unicidade, continuidade com relação a parâmetros e continuação de soluções do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (2.14)$$

2.3.1 Conceitos Preliminares

Seja f uma função que mapeia um intervalo J em \mathbb{R} e seja $f^{(k)}$ a sua derivada de ordem k de f (por convenção, $f^{(0)} = f$). Então introduzimos as seguintes classes de funções:

$$\begin{aligned} C(J) &\triangleq \{f : f \text{ é contínua em } J\} \\ C^k(J) &\triangleq \{f : f^{(i)} \text{ existe e } f^{(i)} \in C(J) \text{ para } i = 0, 1, \dots, k\} \end{aligned}$$

A função $f \in C(J)$ é dita C^k por partes se $f \in C^{k-1}(J)$ e $f^{(k-1)}$ tem derivada contínua $\forall t \in J_f \subset J$ com exceção de um conjunto finito de pontos, $\forall J_f$ finito. De maneira análoga define-se $C(D)$ e $C^k(D)$ para funções que mapeiam um domínio D em \mathbb{R} , sendo a continuidade verificada para cada variável independente e as respectivas derivadas parciais.

2.3.2 Existência de Soluções

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Suponha-se $f \in C(D)$. Dado $(\tau, \xi) \in D$, temos então o seguinte teorema de existência de solução para o problema de valor inicial.

Teorema 2.1: (Existência da Solução) *Se $f \in C(D)$ e $(\tau, \xi) \in D$, então a equação (2.14) tem solução definida em $|t - \tau| \leq c$ para algum $c > 0$.* ■

Observe que o resultado é local pois só garante a existência em intervalo suficientemente pequeno. Para ilustrar que não é imediato determinar o intervalo de definição de uma solução, considere a equação (2.15) cuja solução pode ser obtida por separação de variáveis — ver equação (2.16).

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt \rightarrow \varphi(t) = \frac{\xi}{1 - \xi(t - \tau)} \quad (2.16)$$

Pode-se verificar que, se $\xi > 0$, a solução só é definida para $t < \tau + \xi^{-1}$ pois quando $t \rightarrow \tau + \xi^{-1}$ a solução tende a infinito. Tem-se aqui um exemplo clássico de escape em tempo finito, isto é, a solução tende a infinito em um tempo finito. Observe que no presente caso $D = \mathbb{R}^2$, isto é, a função f é contínua em todo o espaço (x, t) . Apesar disso, o fenômeno (não-linear) de escape em tempo finito ocorre.

2.3.3 Continuação de Soluções

A questão discutida aqui é a seguinte: Até quando se pode estender uma solução dada? Para sermos mais precisos, seja φ uma solução em um intervalo J . Por **continuação** de φ para um intervalo maior J_o , onde φ_o é solução, quando φ pode ser **estendida** ou **continuada** ao intervalo maior J_o . Quando tal extensão não for possível, diz-se que φ **não é continuável** para a direita ou para a esquerda, conforme o caso.

Exemplo 2.1: (Escape em tempo finito) A equação $\dot{x} = x^2$ tem por solução a função $\varphi(t) = (1 - t)^{-1}$ com a variável t contida no intervalo aberto definido por $t \in (-1, 1)$. Esta solução é indefinidamente continuável para a esquerda mas não para a direita. ★

Para a questão de continuação de soluções, temos os resultados clássicos apresentados no teorema 2.2 e corolário 2.1.

Teorema 2.2: (Continuidade da Solução) *Seja $f \in C(D)$ com f limitado em D . Suponha que φ é solução de $\dot{x} = f(t, x)$ no intervalo $J \in (a, b)$, então tem-se que:*

- Os dois limites $\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = \varphi(a^+)$ e $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) = \varphi(b^-)$ existem.
- Se $(a, \varphi(a^+))$ — respectivamente, $(b, \varphi(b^-))$ — estão contidos no domínio D então a solução φ pode ser continuada para a esquerda além do ponto $t = a$ — respectivamente, à direita além de $t = b$. ■

Corolário 2.1: (Intervalo Máximo) Se f é de classe $C(D)$ e se φ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ em um intervalo de J , então φ pode ser continuada até o intervalo máximo $J^* \supset J$ de modo que o par $(t, \varphi(t))$ tende à fronteira ∂D , quando $t \rightarrow \partial J^*$ — e $|t| + |\varphi(t)| \rightarrow \infty$ se ∂D for vazio. A solução estendida φ^* em J^* não é continuável. ■

Exemplo 2.2: Suponha que $D = \mathbb{R}^2$; então podemos ter as duas possibilidades conforme a figura 2.2. No caso 1 da figura 2.2, a solução φ_1 escapa em tempo finito $t = b^*$ mas é bem definida até $t = b^*$ (exclusive). No caso 2, a solução φ_2 vale $\forall t$. ★

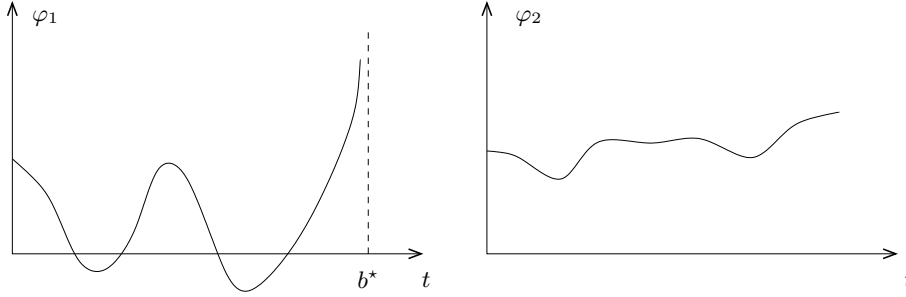


Figura 2.2. Continuação de soluções.

2.3.4 Unicidade da Solução

Considerando que uma equação diferencial deva retratar um sistema físico, é de se esperar que a solução seja única para cada condição inicial dada. Vejamos as condições matemáticas para garantir a unicidade, começando por um exemplo em que tal propriedade não é verificada. Seja $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$. Temos, para a condição inicial dada por (2.17), as soluções (2.18).

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \varphi(t) \equiv 0 \\ \varphi(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad t \in [0, \infty) \quad (2.18)$$

Note que a condição de continuidade é satisfeita e portanto a **existência** de solução é garantida, porém a solução não é única. A seguinte condição é utilizada para garantir a unicidade da solução.

Definição 2.4: (Condição de Lipschitz) Uma função $f \in C(D)$ satisfaz uma **condição de Lipschitz** em D com **constante de Lipschitz** L se a equação (2.19) for verdadeira $\forall (t, x)$ e (t, y) em D . Também se diz que $f(t, x)$ é **Lipschitz contínua** em x .

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad (2.19)$$

▲

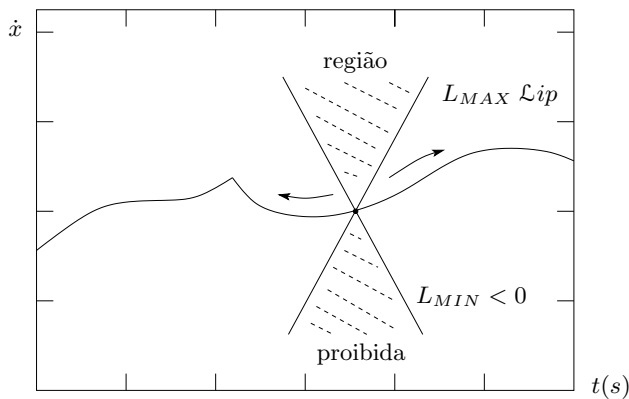


Figura 2.3. Representação gráfica da condição de Lipschitz referente à derivada.

Fato 2.2: Uma função que seja Lipschitz não pode ser mais rápida do que uma trajetória exponencial conforme figura 2.4. ◇

Fato 2.3: Nenhuma função descontínua é Lipschitz. ◇

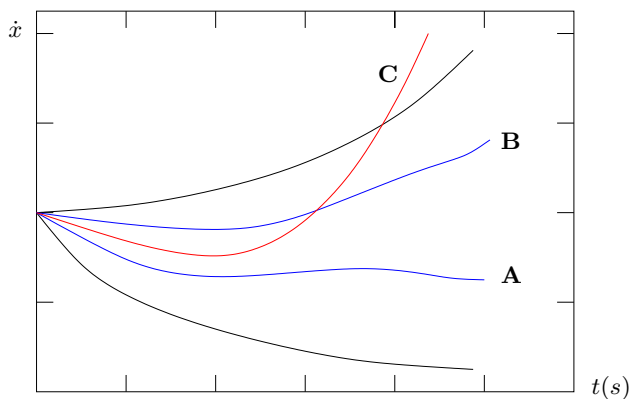


Figura 2.4. Representação gráfica da condição de Lipschitz referente à trajetória. **A** e **B** atendem a condição de acréscimo e decréscimo no tempo. A função **C** cresce mais rápido que a exponencial, portanto esta não é Lipschitz.

Exercício 2.4: Mostre que toda função Lipschitziana é contínua.

Exercício 2.5: Mostre que, se $f(t, x)$ for continuamente diferenciável em x , no domínio D , com $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}|$ limitada por uma constante L , em D , então $f(t, x)$ é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz L .

Observação 2.3: Note que a inequação (2.19) é equivalente a (2.20).

$$\frac{|f(x, t) - f(y, t)|}{|x - y|} \leq L \tag{2.20}$$



Alguns exemplos estão ilustrados na figura 2.5.

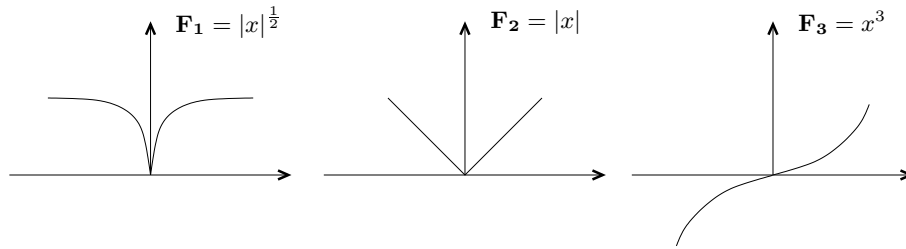


Figura 2.5. Exemplos de funções: \mathbf{F}_1 não é Lip na origem; \mathbf{F}_2 não é diferenciável, porém é Lip e \mathbf{F}_3 é Lip mas não é globalmente Lip.

Agora podemos enunciar o Teorema de Unicidade.

Teorema 2.3: (Teorema de Unicidade) *Se $f \in C(D)$ e $f \in Lip(D)$ com constante de Lipschitz L , então o problema de valor inicial tem no máximo uma solução em qualquer intervalo definido por $|t - \tau| \leq d$.* ■

Corolário 2.2: *Se $f(x, t)$ e $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ são ambas $C(D)$, e $\forall(\tau, \xi) \in D$ e $\forall J$ contendo τ , se a solução do problema de valor inicial existir em J , ela tem que ser única.* ■

2.3.5 Continuidade em Relação a Condições Iniciais e a Parâmetros

Consideramos aqui a dependência das soluções às condições iniciais. Resultado análogo aplica-se à dependência aos parâmetros do sistema. Para mais detalhes, consultar referência [?].

Teorema 2.4: (Variação de Condição Inicial) *Seja $f \in Lip(D)$ com constante L . Seja φ e ψ soluções $|t - \tau| \leq d$ com condições iniciais $\varphi(\tau) = \xi$ e $\psi(\tau) = \xi_0$. Então, as duas soluções se afastam no máximo conforme (2.21).*

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\xi - \xi_0| e^{L|t-\tau|} \quad (2.21)$$



Observação 2.4: A constante L garante que as soluções podem, no máximo, se afastar exponencialmente. A rapidez depende de L . ◆

Teorema 2.5: (Existência Global) *Seja uma função $f \in C(J \times \mathbb{R})$ para algum intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e seja $f \in Lip(J \subset \mathbb{R})$. Então $\forall(\tau, \xi) \in J \subset \mathbb{R}$ a solução do problema de valor inicial existe em todo o intervalo J .* ■

2.3.6 Aplicações da Teoria Fundamental

Pelo teorema 2.3 podemos concluir os seguintes pontos:

1. Não se pode chegar a um ponto de equilíbrio em tempo finito como indicado na figura 2.6.
2. Não se tem soluções oscilatórias para equação de primeira ordem, autônoma $\dot{x} = f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$.
3. Invariança do quadrante positivo nas equações de Volterra.

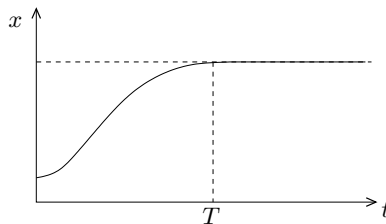


Figura 2.6. Situação impossível para Equações Diferenciais Ordinárias Lipschitz contínuas: Alcance em tempo finito.

2.3.7 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

O objetivo desta seção é generalizar os resultados do caso escalar para o caso de dimensão n . Ao invés de uma única equação diferencial de primeira ordem, trata-se aqui de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem, isto é:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.22)$$

Em forma compacta, a equação (2.22) é escrita como (2.23).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3.8 Continuidade da Solução

Os conceitos de continuidade devem ser aplicados a cada elemento da função $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ representada em (2.22) é escrita simplificada como (2.23).

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad \therefore \quad i = 1, \dots, n$$

2.3.9 Condição de Lipschitz para o Caso n -Dimensional

No caso n -dimensional, a condição de Lipschitz passa a ser (2.24) onde $\|\cdot\|$ é uma norma em \mathbb{R}^n , por exemplo, a norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Para abreviar, escreveremos $f \in \text{Lipschitz}$ e neste caso o sistema (2.23) será dito um sistema Lipschitz.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall (t, x) \text{ e } (t, y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.24)$$

2.3.10 Condição Suficiente para Satisfazer a Condição de Lipschitz

No caso escalar (sistema de equações), ao invés de derivadas parciais temos que usar o Jacobiano $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ que é a matriz de derivadas dada por (2.25).

$$\mathbf{J} \triangleq \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, t)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x, t)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x, t)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Note-se que \mathbf{J} é uma matriz. Mais precisamente, $\mathbf{J} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

O que seria então $\|\mathbf{J}\| < K$? Basta tomar $\|\mathbf{J}\|$ com a norma induzida pela norma vetorial $\|\mathbf{x}\|$ adotada conforme a definição 2.5.

Definição 2.5: (Norma Matricial Induzida) Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a norma de \mathbf{A} , $\|\mathbf{A}\|$ induzida por uma norma $\|x\|$ vetorial em \mathbb{R}^n é definida por (2.26), ou equivalentemente por (2.27).

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|\mathbf{x}\| = 1\} \quad (2.26)$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\left\{\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \quad (2.27)$$

Então, uma condição suficiente para a função $f \in \text{Lip}(D)$ é dada por: $\|\mathbf{J}\| < K \quad \forall (x, t) \in D$ ▲

2.3.11 Cálculo da Norma da Matriz Jacobiano

No caso da norma euclidiana tem-se o seguinte resultado clássico:

$$\|\mathbf{J}\| = \max\{\lambda_i^{\frac{1}{2}}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})\}$$

onde $\lambda_i(\cdot)$ são os autovalores de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$, que são todos positivos ou nulos ($\lambda_i \geq 0$).

Exemplo 2.3: O sistema seguinte pode ou não ser Lipschitz:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(x, t) \mathbf{x}; \quad \|\mathbf{A}\| < K \forall (x, t)$$

Aqui temos um sistema Lipschitz:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 = \cos(t)x_1 + x_2 \end{cases}$$

O sistema (2.28) não é globalmente Lipschitz.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(x t) x \\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \cos(x t) - x t \sin(x t) \end{cases} \quad (2.28)$$

★

Com as definições apresentadas acima para o caso n -dimensional, podemos aplicar os teoremas de existência, unicidade, continuação, etc., apenas devendo interpretar o valor absoluto do caso escalar como norma vetorial ou matricial.

3

Análise Qualitativa

Neste capítulo introduzimos os resultados básicos da análise qualitativa de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens.

3.1 Análise Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Antes de apresentar a análise qualitativa no plano de fase, que trata do caso $x \in \mathbb{R}^2$, vamos analisar qualitativamente o caso de primeira ordem que é básico. Seja uma equação escalar $\dot{x}(t) = f(x)$ com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução: $f \in \text{Lipschitz}$.

Observação 3.1: Se x^* é um zero de $f(x)$, isto é, $f(x^*) = 0$, então $\varphi(t) \equiv x^*$ é uma solução constante da equação diferencial (2.1). \blacklozenge

Observação 3.2: Se x_1^* e x_2^* forem dois zeros distintos adjacentes de $f(x) = 0$ e $x_1^* < x_2^*$ então tem-se que:

1. A função $f(x)$ tem sinal constante em x_1^* e x_2^* , isto é $f(x) > 0$ — ou $f(x) < 0$ — $\forall x \in (x_1^*, x_2^*)$
2. Se $f(x) > 0$ em (x_1^*, x_2^*) , toda solução $\varphi(t)$ com condição inicial $\varphi(\tau) \in (x_1^*, x_2^*)$ cresce com $t \rightarrow \infty$, assintoticamente para o valor x_2^* . Se $f(x) < 0$, tal solução decresce assintoticamente para x_1^* . \blacklozenge

Demonstração: O item 1 da observação 3.2 acima é consequência de $f(x)$ de ser contínua o que implica que f mantém o mesmo sinal entre dois zeros adjacentes de $f(x) = 0$. O item 2 é provada através da unicidade de solução. Com efeito, se $x(\tau) \in \mathbf{I}$, tal que $\mathbf{I} = (x_1^*, x_2^*)$, a solução $\varphi(t)$ permanecerá em \mathbf{I} para todo o tempo t maior que um instante τ , i.e. $\forall t > \tau$; caso contrário, cruzaria uma das soluções constantes $\varphi_1(t) \equiv x_1^*$ o que seria impossível. No intervalo \mathbf{I} , a derivada $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi)$ tem sinal constante, positivo ou negativo. Logo, a solução $\varphi(t)$ cresce ou decresce monotamente. Como $\varphi(t)$ é contínua e é limitada superiormente e inferiormente, ele tende a uma constante. Tal constante deve coincidir com x_1^* ou x_2^* , conforme o caso, pois caso contrário tenderia para uma terceira constante x_3^* , o que é impossível, pois entre os zeros adjacentes x_1^* e x_2^* não existem outros.

Observa-se que os dois fatos acima permitem estabelecer facilmente o comportamento qualitativo das soluções de uma equação escalar autônoma. Com efeito, basta encontrar os zeros de $f(x)$ e conhecer o sinal de $f(x)$ entre tais zeros. Assim, no caso da figura 3.1, as setas no eixo x indicam o sentido do percurso que uma solução iniciada no trecho correspondente assumiria.

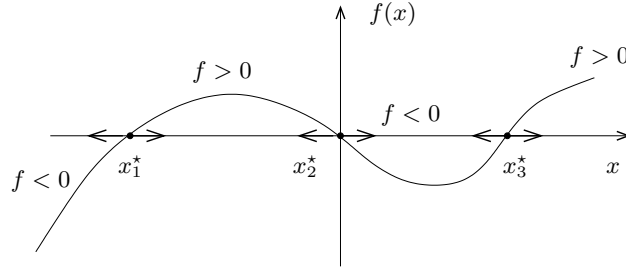


Figura 3.1. Exemplo de função não-linear.

Note que o tempo inicial τ não é relevante pois o sistema é autônomo. O sistema é invariante no tempo e portanto podemos começar um experimento a qualquer momento τ que o fenômeno se repetirá caso $x(\tau)$ seja o mesmo. Esta propriedade, válida para casos de dimensão superior se exprime pelo seguinte fato:

Observação 3.3: Dada a equação diferencial autônoma (3.1).

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ f \in \text{Lipschitz} \end{cases} \quad (3.1)$$

Se $\varphi(t)$ é uma solução de (3.1), então temos que $\varphi(t+c)$ também é uma solução de (3.1). \blacklozenge

Demonstração Seja $\varphi(t)$ uma solução da equação (3.1), então tem-se que:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbf{J}$$

Façamos uma mudança de variável $t = \hat{t} + c$. Então:

$$\frac{d\varphi(\hat{t} + c)}{d(\hat{t} + c)} = f(\varphi(\hat{t} + c))$$

Como $d(\hat{t} + c) = dt$, temos $\frac{d\varphi(\hat{t} + c)}{d\hat{t}} = f(\varphi(\hat{t} + c))$. Como podemos novamente trocar \hat{t} por t pois se trata apenas de uma mudança de notação. Temos:

$$\frac{d\varphi(t + c)}{dt} = f(\varphi(t + c))$$

Graficamente temos a interpretação pela figura 3.2.

O gráfico $(\varphi(t+c), t)$ é apenas $(\varphi(t), t)$ transladado horizontalmente de um valor constante c .

Observação 3.4: Note que isto é consistente com o fato de que $\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi)$ só depende de φ , e não de t . \blacklozenge

Então temos os resultados básicos que levam às seguintes construções de diagramas que descrevem qualitativamente o comportamento das soluções de $\dot{x} = f(x)$ no caso escalar.

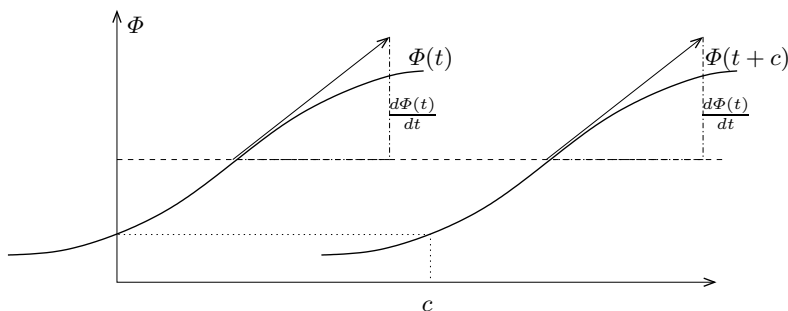


Figura 3.2. Interpretação gráfica de translação no tempo.

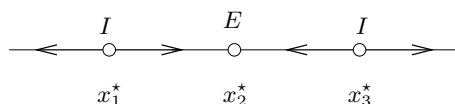


Figura 3.3. Reta de fase de um sistema de primeira ordem.

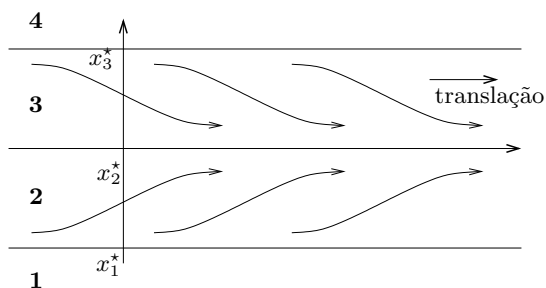


Figura 3.4. As regiões 1, 2, 3 e 4 são invariantes.

Para o exemplo da figura 3.1 temos a reta de fase da figura 3.3. Intuitivamente vemos que a solução de equilíbrio (que permanece constante) $\varphi_1 = x_1^*$ é instável, $\varphi_2 = x_2^*$ é estável e $\varphi_3 = x_3^*$ é instável. Podemos também traçar qualitativamente as soluções no plano de movimento (x, t) conforme a Fig. 3.4.

Exemplo 3.1: (Sistema de Primeira Ordem Contínuo por Partes) Considere a equação contínua por partes $\dot{x} = f(x) = -a \operatorname{sign}(x) + r$ para a qual distingüiremos dois casos: (1) $r > a > 0$ e (2) $a < r < 0$.

Este é o caso de um sistema de controle a relé conforme a figura 3.5, no qual o relé possui uma ciclo de histerese mostrado na figura 3.6. Para o caso de $a = 1$, uma solução típica do caso (2), construída colando-se os trechos correspondentes a cada estado do relé, está mostrada na figura 3.7. O que ocorre no caso (1)? ★

O estudo do caso escalar $\dot{x} = f(x)$ apresentado acima, mostra a força de análise qualitativa. Pode-se concluir sobre o comportamento qualitativo das soluções sem recorrer à integração ou cálculos complicados. Vamos em seguida estender a análise qualitativa para o caso de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

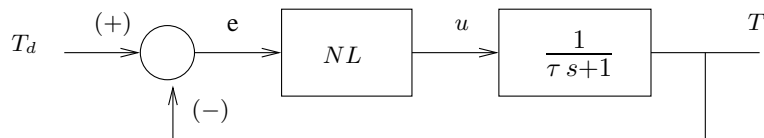


Figura 3.5. Sistema de controle de temperatura a relé.

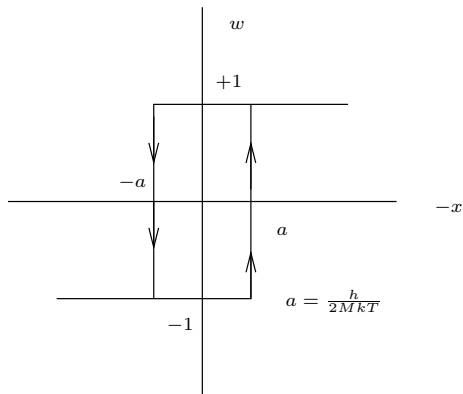


Figura 3.6. Relé com histerese.

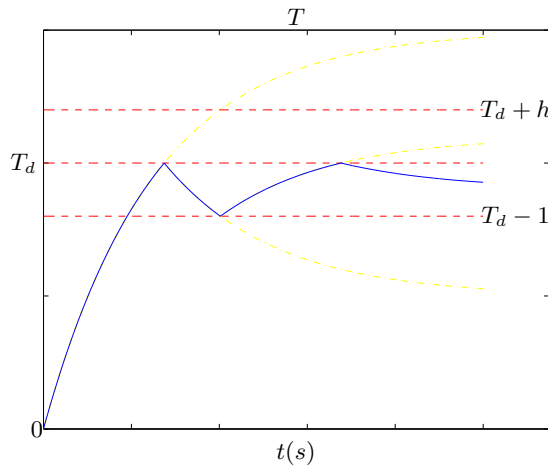


Figura 3.7. Controle de temperatura: Resposta no tempo com $T_d + h < 1$.

3.2 Análise Qualitativa de Sistemas de Segunda Ordem

Vimos que equações diferenciais não-lineares de primeira ordem podem ser facilmente estudadas de um ponto de vista qualitativo. O passo seguinte é naturalmente realizar a análise qualitativa de sistemas de segunda ordem, isto é, composto de duas equações de primeira ordem do tipo (3.2) satisfazendo $f \in \text{Lipschitz } \forall \mathbf{x}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

Tais sistemas também podem ser analisados qualitativamente de forma bastante completa devido a que suas trajetórias podem ser representadas por curvas no plano. A importância desses sistemas se deve ao fato de que permitem uma visão clara de importantes fenômenos tipicamente não-lineares que se estendem ao comportamento de sistemas não-lineares de ordem superior.

Consideremos uma solução $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ de (3.2) a partir de $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ como condição inicial. No plano (x_1, x_2) , denominado **plano de fase**, a solução $\mathbf{x}(t)$ descreve uma curva denominada **trajetória** ou **órbita**.

A função $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$ associa a cada ponto x do plano um vetor. Este vetor é tangente à trajetória que passa por x . Visto de outra forma, $\mathbf{f}(x)$ define um **campo vetorial** (assim como o de um campo magnético) e as trajetórias são as **curva de campo** que são sempre tangentes ao campo. É claro que se $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$, a tangente não é definida — ver exemplo em [?], páginas 35 – 36.

Os pontos do plano de fase onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ são denominados pontos singulares ou de equilíbrio. Seja \mathbf{x}^* um desses pontos, isto é,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Se $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$ então $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \forall t$ é uma solução constante e é a única que passa por essa condição inicial. A família de todas as trajetórias do plano de fase denomina-se **retrato de fase** de (3.2). Note-se que ao considerar o plano de fase estamos na realidade observando as projeções das curvas soluções $\mathbf{x}(t)$ no espaço tridimensional sobre o plano de fase.

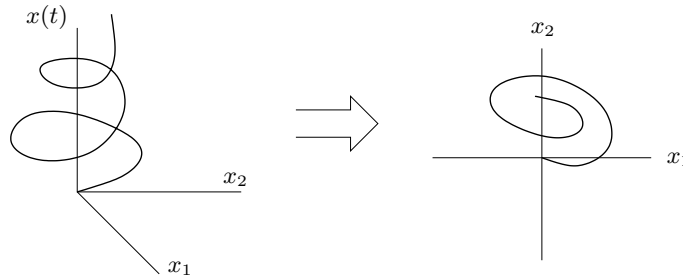


Figura 3.8. O plano de fase como uma projeção.

Em geral, na análise do plano de fase, retém-se apenas o sentido de movimento, indicado por uma seta, mas ignora-se o valor de t em cada ponto da curva de fase. Em princípio seria possível graduar cada curva com a informação de t . Mas isso raramente é feito pois o plano de fase visa sobretudo a análise qualitativa do sistema. Assim, uma curva fechada do retrato de fase representa uma solução periódica (ver figura 3.9), mas não nos preocupamos com o valor do período na análise qualitativa.

3.2.1 Comportamento Qualitativo de Sistemas Lineares

Seja um sistema linear invariante no tempo dado por (3.4) com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ para o qual desejamos estudar a natureza qualitativa da origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que é um ponto de equilíbrio.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.4)$$

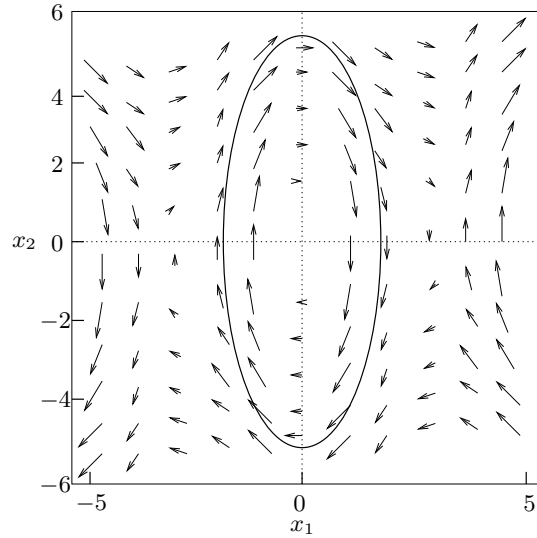


Figura 3.9. Campo vetorial de um pêndulo sem atrito representado pelo par de equações diferenciais a seguir: $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_2 = -10 \sin(x_1)$.

Tal sistema é importante não só para analisar sistemas lineares mas também para a análise local, isto é, na vizinhança de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear, como veremos mais adiante. A solução de (3.4) é bem conhecida e dada por (3.5) onde \mathbf{J}_r é a **forma de Jordan real** da matriz \mathbf{A} e \mathbf{M} é uma matriz real não singular tal que, fazendo-se a transformação $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$, obtém-se $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}_r \mathbf{z}$ onde \mathbf{J}_r assume uma das seguintes formas conforme (3.6) com $k = 0$ ou 1 . A primeira forma corresponde aos casos em que os autovalores da matriz \mathbf{A} , λ_1 e λ_2 são reais e iguais e a terceira quando são complexos conjugados.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \mathbf{e}^{\mathbf{J}_r t} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_o \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Quando um dos autovalores é nulo tem-se uma situação especial em que a origem não é ponto de equilíbrio isolado e por essa razão tais casos serão considerados separadamente.

3.2.1.1 Primeiro Caso: Parâmetros Reais e não Nulos

Seja o seguinte sistema linear (3.7) com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Primeiramente suponhamos que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. As soluções de (3.7) são dadas por (3.8).

$$\begin{cases} z_1(t) = z_1(0) \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = z_2(0) \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (3.8)$$

Temos portanto as relações seguintes

$$z_2 = c_0 z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (3.9)$$

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1} \quad (3.10)$$

Portanto, as curvas de fase são parabólicas como na figura 3.10. Sendo $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, as trajetórias são orientadas em direção à origem, o que está de acordo com o vetor de campo associado. Note que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 > 0$.

O eixo z_2 é uma assíntota das curvas parabólicas para $|z_1|$ ou $|z_2|$ tende a infinito, pois o segundo membro de (3.10) tende a infinito, e o eixo z_1 é a assíntota para $|z_1|$ ou $|z_2| \rightarrow 0$, pois (3.10) tende a zero nesse caso. **A singularidade é denominada NÓ ESTÁVEL.** Como transformações lineares não singulares preservam retas e paralelismo, nas coordenadas originais (x_1, x_2) temos a figura 3.11(A), em coordenadas modais e a figura 3.10(A) correspondente em coordenadas originais. Para $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ basta inverter o sentido da seta, isto é as trajetórias “divergem” da origem. Temos então a figura 3.10(B) — respectivamente, figura 3.10(B) — que corresponde a um **NÓ INSTÁVEL.**

Vejam os casos de autovalores reais e de sinais opostos. Existem duas retas fazendo parte do retrato de fase que em coordenadas canônicas z são exatamente os eixos z_1 e z_2 . Se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então, evidentemente o movimento é em direção à origem no eixo z_2 e em direção oposta à origem no eixo z_1 . Isto está de acordo com a natureza hiperbólica das curvas de fase definidas por (3.9) já que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. O retrato de fase neste caso denominado de **SELA**, está na figura 3.12.

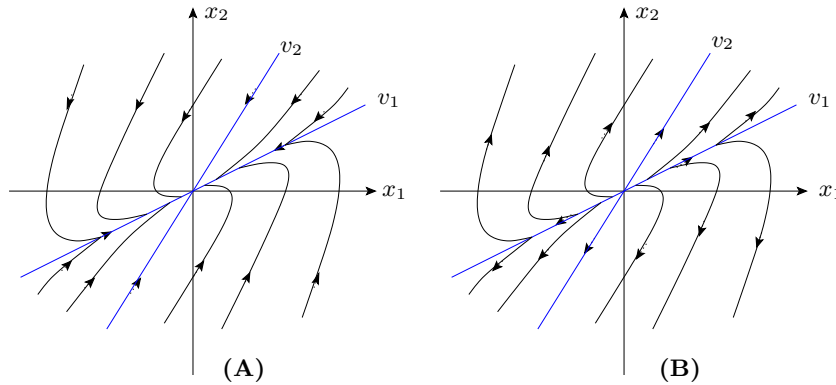


Figura 3.10. Retrato de Fase de (A) nó estável; (B) nó instável em coordenadas originais.

É importante ressaltar que as assíntotas estão na direção dos autovetores respectivos a λ_1 e λ_2 . A inclinação (tangente) desses autovetores é dada por uma das igualdades de (3.11).

$$\begin{cases} p_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} \\ p_i = \frac{a_{21}}{\lambda_i - a_{22}} \end{cases} \quad \text{com } i = 1, 2 \quad (3.11)$$

3.2.1.2 Segundo Caso: Autovalores Complexos Conjugados

O sistema possui autovalores na forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ onde a equação (3.12) representa a forma canônica real para este caso. Para este caso é mais conveniente realizar uma transformação para coordenadas polares em (ρ, θ) definidas por (3.13).

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 = \beta z_1 - \alpha z_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

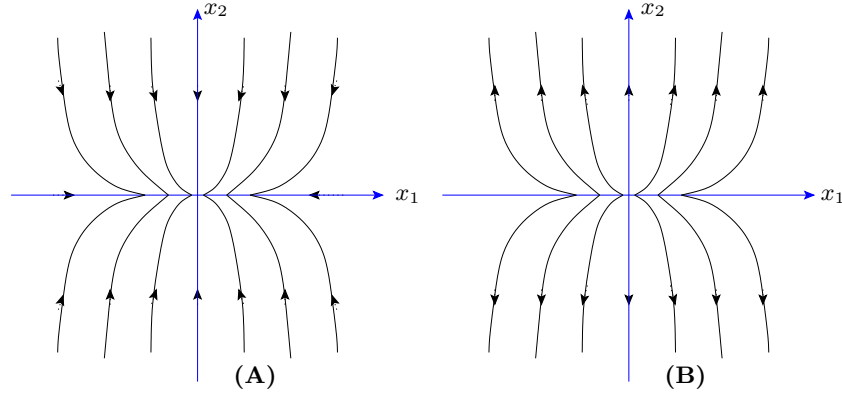


Figura 3.11. Retrato de Fase de (A) nó estável; (B) nó instável em coordenadas modais.

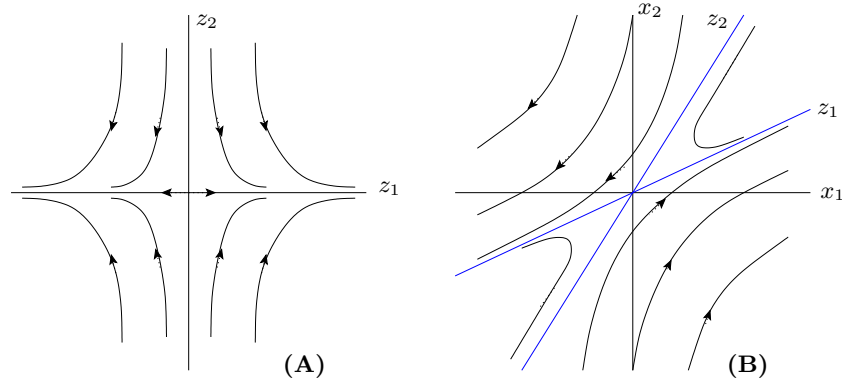


Figura 3.12. Retrato de Fase de um ponto de Sela (A) em coordenadas modais (ou canônicas) e (B) em coordenadas originais.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \end{cases} \quad (3.13)$$

De forma equivalente, as variáveis de estado do sistema (3.12) passam a ser escritas como (3.14).

$$\begin{cases} z_1 = \rho \cos(\theta) \\ z_2 = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad (3.14)$$

A partir da equação (3.12) e dos estados definidos como funções de θ e ρ , é possível escrever o sistema não-linear (3.12) na forma (3.15).

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.15) obtém-se (3.17).

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \rho \cos \theta - \beta \rho \sin \theta \\ \beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \rho \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Conclusão: Temos um sistema linear decorrente da transformação das variáveis de estados. Este sistema — equação (3.18) — tem como variáveis de estado θ e ρ definidas em (3.13).

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha\rho \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \quad (3.18)$$

Assim, temos espirais convergindo para a origem se $\alpha < 0$ — figuras 3.13(A) e 3.14(A) — divergindo da origem se $\alpha > 0$ — figuras 3.13(B) e 3.14(B) — ou oscilando indefinidamente como uma mola-massa sem amortecimento com velocidade angular $\beta \text{ rad/s}$, se $\alpha = 0$ — figura 3.13(C) e 3.14(C). No caso de espirais, o equilíbrio é denominado **FOCO (estável ou instável)** e no caso de uma família de curvas fechadas, denominamos o equilíbrio de **CENTRO**.

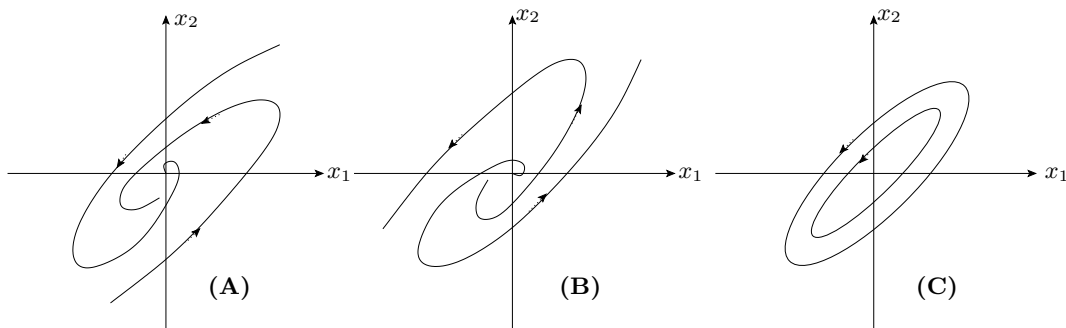


Figura 3.13. Diagrama de fase: (A) Foco estável ($\alpha < 0$), (B) Foco instável ($\alpha > 0$) e (C) Centro ($\alpha = 0$) em **coordenadas originais**.

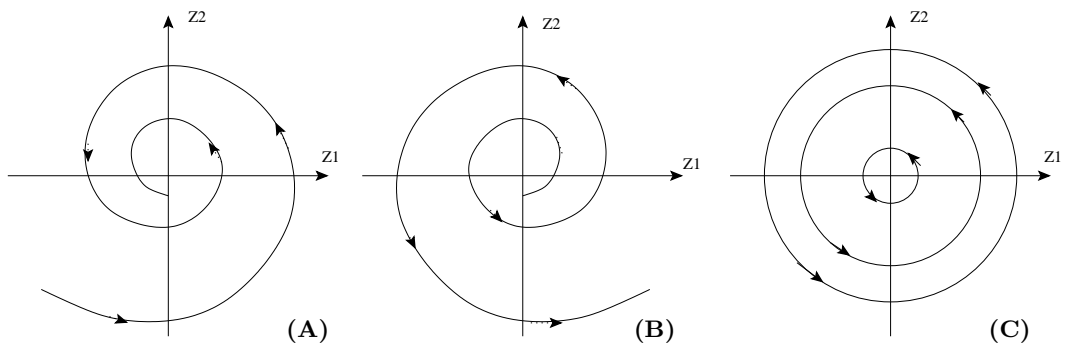


Figura 3.14. Diagrama de fase: (A) Foco estável ($\alpha < 0$), (B) Foco instável ($\alpha > 0$) e (C) Centro ($\alpha = 0$) em **coordenadas canônicas**.

Note que (3.14) e (3.16) podem ser aplicados a sistemas de segunda ordem não-lineares. A forma polar é muito útil para a análise de ciclos-limite.

3.2.1.3 Terceiro Caso: Autovalores Múltiplos Não Nulos

Ver [?], páginas 41 – 44.

3.2.1.4 Quarto Caso: Pelo Menos um Autovalor Nulo

A figura 3.15 exibe um mapa de tipos de singularidades de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem em função de traço de \mathbf{A} (σ) e de seu determinante (Δ).

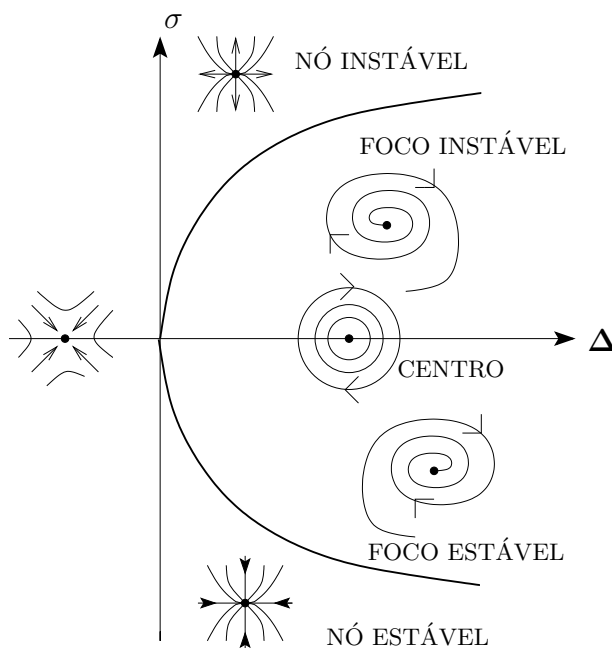


Figura 3.15. O plano $\Delta \times \sigma$ e o tipo de singularidade.

Este plano é útil na análise de uma **bifurcação**, isto é, de uma mudança do comportamento qualitativo do sistema (no caso, do ponto singular) ao se variar um parâmetro do sistema — por exemplo, o ganho de um amplificador ou o valor de uma massa.

Vemos imediatamente que os casos em que $\lambda_i = 0$ para algum i , correspondem a uma mudança qualitativa, por exemplo, de Nó para SELA. A passagem pela origem do plano ($\Delta \times \sigma$) é a mais complexa e corresponde a ambos os autovalores se tornarem nulo.

3.2.2 Retrato de Fase

Para se construir o retrato de fase, convém primeiramente determinar os pontos de equilíbrio do sistema — eventualmente não existe nenhum — que são os pontos $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ que satisfazem a equação algébrica (3.3). No caso do sistema ser linear, temos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (3.19)$$

A equação algébrica (3.19) toma portanto a forma (3.20).

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^* = -\mathbf{b} \quad (3.20)$$

Se a matriz \mathbf{A} for não singular, então a solução é única e é dada por (3.21).

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (3.21)$$

No caso de \mathbf{A} ser singular podemos ter uma infinidade de soluções, se \mathbf{b} estiver no domínio² de \mathbf{A} , ou no caso contrário, nenhuma solução, isto é, não teríamos ponto de equilíbrio.

Exemplo 3.2: Sistema (3.22) — massa–mola–amortecedor: Com constantes k e μ positivas não-nulas.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - \mu x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Ponto de equilíbrio: $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. ★

Exemplo 3.3: Sistema (3.23) — massa simples sem força: Infinitos pontos de equilíbrio.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Pontos de equilíbrio: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x_1^*$. ★

Exemplo 3.4: Sistema (3.24) — Motor sob Ação de Corrente Constante: Não há pontos de equilíbrio!

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 + K_m I \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_m I \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Pontos de equilíbrio: A parte linear do sistema (3.24) possui uma matriz \mathbf{A} singular conforme (3.25).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \quad (3.25)$$

O subespaço coluna desta matriz \mathbf{A} é dado por (3.26).

$$\mathcal{R} = \left\{ x/x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \end{bmatrix}, \forall \alpha \right\} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_m I \end{bmatrix} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A}) \quad (3.27)$$

Neste caso — parâmetro $I \neq 0$ — não existe ponto de equilíbrio. O eixo do motor não pára de girar. ★

Vejamos a seguir um exemplo não-linear onde há múltiplos pontos de equilíbrio isolados.

Exemplo 3.5: Sistema (3.28) — Circuito com Diodo Túnel: O modelo de estado do circuito é (3.28).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{cases} \quad (3.28)$$

² Na literatura, é comum encontrar a denominação de *espaço-coluna* da matriz \mathbf{A} .

Utilizando valores numéricos sugeridos em [?], temos (3.29).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5(-h(x_1) + x_2) \\ \dot{x}_2 = 0,2(-x_1 - 1,5x_2 + 1,2) \end{cases} \quad (3.29)$$

A característica do diodo túnel é dada por:

$$h(x_1) = 17,76x_1 - 103,79x_1^2 + 229,62x_1^3 - 226,31x_1^4 + 83,72x_1^5$$

As equações algébricas dos pontos de equilíbrio são (3.30) e (3.31).

$$-h(x_1) - x_2 = 0 \quad (3.30)$$

$$-x_1 - 1,5x_2 + 1,2 = 0 \quad (3.31)$$

Observe que (3.30) define uma curva no plano $x_1 \times x_2$ e (3.31) define uma reta. Assim, as soluções do sistema de duas equações não-lineares a duas incógnitas (3.30), (3.31) podem ser interpretadas como os pontos de interseção das curvas em (3.32).

$$\begin{cases} x_2 = h(x_1) \\ x_2 = -\frac{1}{1,5}x_1 + \frac{1,2}{1,5} \end{cases} \quad (3.32)$$

Esses pontos denominados Q_1, Q_2 e Q_3 estão mostrados na figura 3.16. ★

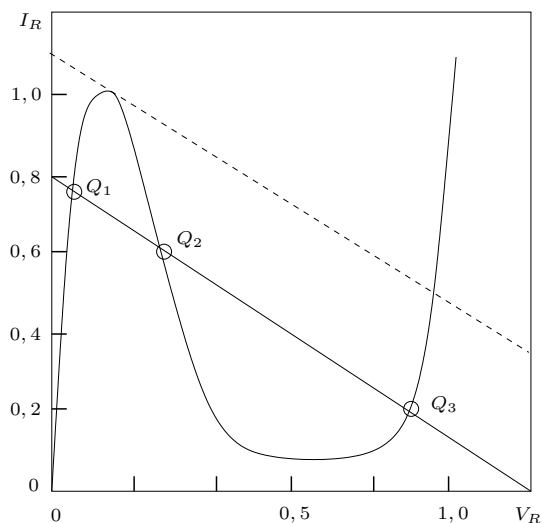


Figura 3.16. Determinação gráfica dos pontos de equilíbrio.

3.2.2.1 Análise Local dos Pontos de Equilíbrio

Dado o sistema apresentado em (3.33) e um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ podemos expandir as funções $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ em série de Taylor em torno de \mathbf{x}^* para obtermos o sistema (3.34).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1^*, x_2^*) + a_{11}(x_1 - x_1^*) + a_{12}(x_2 - x_2^*) + t.o.s. \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1^*, x_2^*) + a_{21}(x_1 - x_1^*) + a_{22}(x_2 - x_2^*) + t.o.s. \end{cases} \quad (3.34)$$

O fator *t.o.s.* simboliza os termos de ordem superior em $x_i - x_i^*$ para $i = 1, 2$ e $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$. Definindo as variáveis $y_1 \triangleq x_1 - x_1^*$ e $y_2 \triangleq x_2 - x_2^*$, e observando que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, temos a aproximação linear dada por (3.35), que foi estudada na secção 3.2.1.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \quad (3.35)$$

Na vizinhança de um ponto singular temos portanto a aproximação (3.36), onde a matriz \mathbf{A} é dada por (3.37).

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \triangleq \left[\begin{array}{cc} \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} & \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \\ \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} & \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \end{array} \right] \quad (3.37)$$

A matriz $\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ é denominada matriz Jacobiano.

Sabe-se que o sistema (3.36) retrata qualitativamente o ponto de equilíbrio do sistema não-linear original quando os autovalores da matriz \mathbf{A} estiverem todos fora do eixo imaginário. Este fato generaliza-se para sistemas de ordem maior [?] e conforme provado no Teorema de Hartmann-Grobman.

A equivalência qualitativa é no sentido da equivalência topológica denominada conjugação — veja [?] — (dois campos conjugados), isto é, quando houver uma transformação biunívoca e contínua que transforma o retrato de fase de um sistema ao outro. No caso, a conjugação é entre a vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema original e a origem do sistema linearizado (3.36).

Aplicando o exposto acima ao exemplo do circuito com diodo túnel — exemplo 3.5 — temos a equação (3.38).

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} -0,5h(x_1) & 0,5 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Aos pontos de equilíbrio Q_1 , Q_2 e Q_3 correspondem respectivamente as matrizes Jacobianos (3.39), (3.40) e (3.41).

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3,598 & 0,5 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1,82 & 0,5 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1,427 & 0,5 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Os autovetores são, respectivamente, $\begin{pmatrix} -3,57 \\ -0,33 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1,77 \\ -0,25 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1,33 \\ -0,4 \end{pmatrix}$. Assim, Q_1 e Q_2 são nós estáveis e Q_3 é uma sela.

3.2.3 Obtenção do Retrato de Fase

Obtido por simulação numérica, o retrato de fase está mostrado na figura 3.17. Note que o aspecto local de cada ponto de equilíbrio é similar ao do caso linear correspondente. Apenas as assíntotas não são retas mas são apenas tangentes aos autovetores da matriz Jacobiano no ponto de equilíbrio.

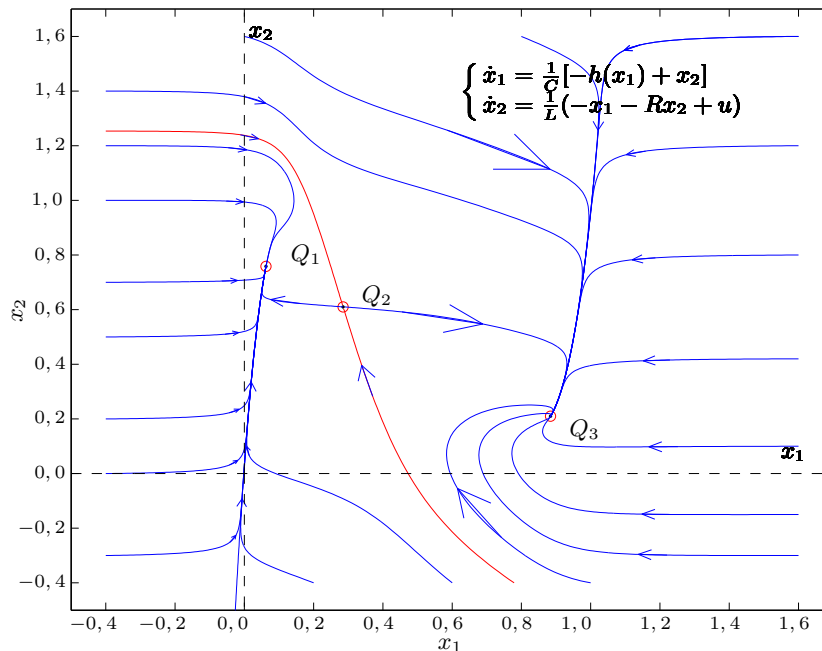


Figura 3.17. Retrato de fase do circuito a diodo túnel indicando os pontos de equilíbrio e curva separatriz dos dois domínios.

Outro fato interessante é a divisão do plano de fase em dois domínios pelas curvas (invariantes) que tendem para a sela. Um domínio corresponde ao domínio de estabilidade de Q_1 e outro ao de Q_3 . Por essa razão, falamos em curva **separatriz**.

3.2.3.1 Circuito Bi-Estável

O circuito a diodo túnel pode operar como um circuito bi-estável. Com efeito, considerando a fonte de tensão variável com entrada ($u = E$) e a tensão $y = v_R$ sobre o diodo túnel como saída temos o diagrama da figura 3.18 indicando um comportamento bi-estável com histerese. Este diagrama pode ser obtido a partir da figura 3.17 deslocando a reta característica (3.30) paralelamente a ela mesma para cima e para baixo. Na região entre os pontos A e B coexistem três pontos de equilíbrio, dois estáveis e um instável — não detetável na prática. Fora dessa região temos apenas um ponto de equilíbrio (Q_1 ou Q_3).

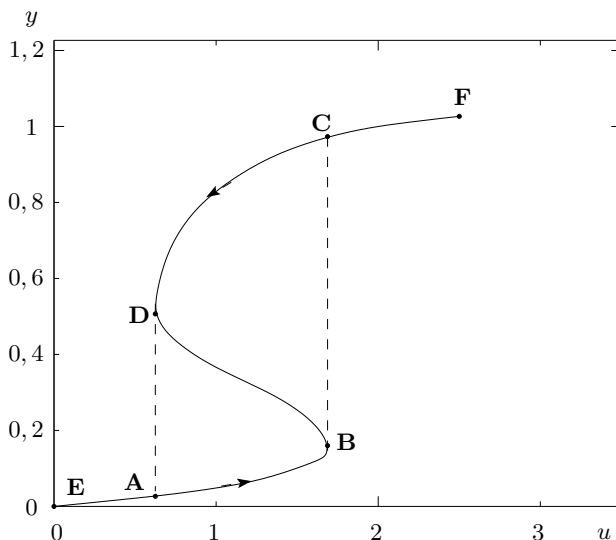


Figura 3.18. Característica de histerese de um circuito de diodo túnel.

3.2.3.2 Retrato de Fase do Pêndulo

Este é um exemplo clássico. Os pontos estáveis são centros (amortecimento nulo), focos (amortecimento moderado) ou nós (amortecimento forte). Os pontos instáveis são sempre selas. As equações do pêndulo considerado são dadas por (3.42).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -10 \sin(x_1) - \mu x_2 \end{cases} \quad (3.42)$$

A figura 3.19 apresenta a simulação do sistema (3.42) para amortecimento unitário ($\mu = 1$). Para este valor de amortecimento, os pontos de equilíbrio estáveis são focos. A figura 3.20 mostra a simulação do mesmo sistema com amortecimento nulo ($\mu = 0$), neste caso verifica-se os centros sobre os pontos estáveis.

Exercício 3.1: Provar que os pontos de equilíbrio do sistema (3.43) sempre são CENTROS ou SELAS.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) \end{cases} \quad (3.43)$$

3.2.3.3 Realização da Simulação do Retrato de Fase via MatLab.

Vários aplicativos disponíveis possibilitam a simulação do retrato de fase de um sistema dinâmico. A seguir é apresentada a estrutura de um *M file* do MatLab para simulação.

A simulação pode ser realizada através da função MatLab denominada `ode45`. Esta função resolve equações diferenciais pelo algoritmo de *Runge-Kutta* de quarta ordem. A sintaxe é a seguinte:

```
[T,X] = ODE45 ('ODEFUN', [TO TFINAL], X0, OPTIONS);
```

Onde as variáveis desta linha de código são:

- Variáveis de saída:

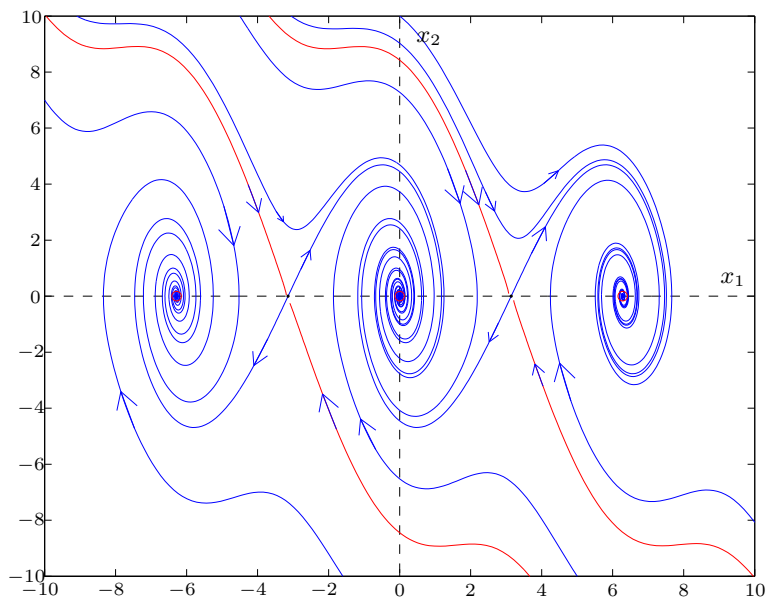


Figura 3.19. Retrato de fase para pêndulo com atrito ($\mu = 1$).

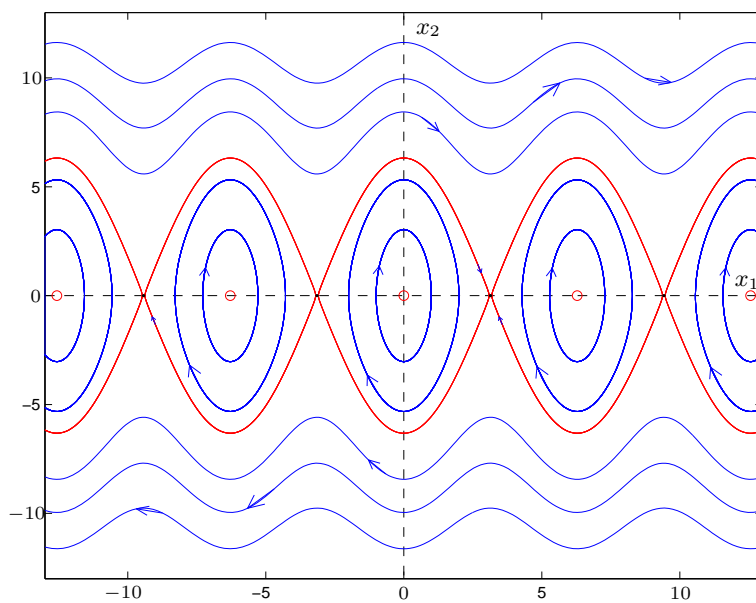


Figura 3.20. Retrato de fase para pêndulo com atrito nulo ($\mu = 0$).

- Vetor tempo T : Este vetor é utilizado para traçar a escala de tempo nos gráficos. Para o retrato de fase, não é necessário.
- Vetor de estados X . Apresenta o vetor de estados para cada instante dentro de um intervalo especificado.
- Variáveis de entrada: A função `ode45` possui 4 (quatro) parâmetros de entrada.
 - Nome da função escrita para o sistema dinâmico e sinal de controle (quando este existe). O cabeçalho desta função deve ter a seguinte estrutura:


```
function [dx] = ODEFUN (t,x);
```

 onde x é o estado atual e dx , o próximo.
 - Vetor tempo com apenas 2 (dois) elementos: O instante inicial e o final.
 - Condição inicial X_0 . Deve ser um vetor coluna conforme a definição do sistema feita em `ODEFUN`.
 - Este campo é opcional, mas é muito importante por definir um valor para o passo de integração a partir da definição do erro relativo máximo.


```
OPTIONS = odeset('ODEFUN',1e-6);
```

 O valor por definição para o erro relativo é 10^{-3} .

Até então foi visto o procedimento para a simulação do sistema. O retrato de fase é obtido através de várias simulações com condições iniciais diferentes e plotar os estados nos eixos. A seguir há um modelo de código para a obtenção do retrato de fase.

```
TSPAN = [0 5];
VETOR = [v01 v02 v03 v04 v05 v06]; % alguns vetores contendo condicoes
                                     % iniciais concatenados para
                                     % simulacao um a um.

options = odeset('RelTol',1e-6);
for index=1:length(VETOR)
    [T,X] = ode45 ('ODEFUN',TSPAN,VETOR(:,index),options);
    plot (X(:,1),X(:,2)) % sistema com dois estados (posicao e velocidade)
    if index == 1
        hold on
    end
end
end
```

3.2.3.4 Propriedades Básicas das Curvas de Fase

A existência de pacotes de simulação de fácil utilização não elimina entretanto a necessidade de se conhecer algumas propriedades básicas das curvas de fase (trajetórias) a fim de permitir o traçado “completo” do retrato de fase, isto é, um traçado que contenha um quadro global de todas as propriedades qualitativas relevantes do sistema, a partir de qualquer condição inicial, como por exemplo nas figuras 3.17 e 3.19. A partir destas propriedades básicas e o traçado de algumas isóclinas, é possível esboçar o plano de fase, assim como se faz como o lugar das raízes de um sistema linear realimentado. Às vezes, o simples esboço é suficiente para certos fins. Eventualmente pode-se refinar o retrato de fase usando um programa de simulação. O esboço ajuda a escolher as condições iniciais das curvas de fase mais relevantes.

Cabe ressaltar que, com exceção de casos particulares, como por exemplo, sistemas conservativos que preservam uma função de energia, é difícil integrar analiticamente as equações diferenciais do sistema e assim obter as expressões analíticas das curvas de fase. Os casos integráveis são tratados em [?].

Enumeramos a seguir certas propriedades que acreditamos úteis para esboçar um retrato de fase.

1. **Teorema do Fluxo Tubular:** A figura 3.21 indica que existe em transformação T contínua e biunívoca para cada ponto regular \mathbf{x} — isto é, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ — tal que o fluxo definido pelas trajetórias em torno de \mathbf{x} se transforma na caixa de fluxo.

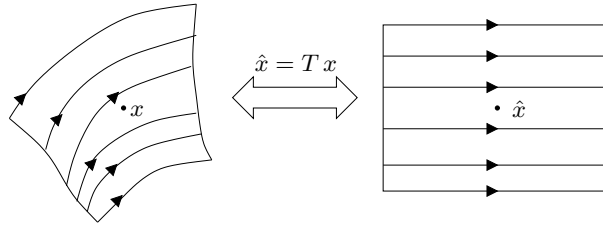


Figura 3.21. Teorema do fluxo tubular (à direita).

2. **Trajetoórias do plano de fase só podem se cruzar em pontos não regulares**, esta é a consequência do teorema de fluxo tubular, ou seja, pontos singulares ou de equilíbrio. Como por exemplo, note que as assíntotas de selas e nós se interceptam no ponto singular. Note ainda que isso é coerente com fato de que a direção do campo vetorial não é definida nos pontos singulares — daí o nome “singulares”.
3. Ao longo de uma curva de fase **o sentido de movimento é invariante**, a menos que o sentido se altere quando a curva passa por um ponto singular — também é consequência do teorema fluxo tubular.
4. **Continuidade em relação às condições iniciais:** Curvas começando próximas, ficam próximas, durante tanto mais tempo quanto mais próximas estiverem inicialmente.
5. **Propriedades de Simetria:** $F(x_1, x_2) = \frac{f_2}{f_1}(x_1, x_2)$ representa a inclinação do vetor de campo em um ponto X .
 - (a) Simetria em relação ao eixo x_1 : $F(x_1, x_2) = -F(x_1, -x_2)$.
 - (b) Simetria em relação ao eixo x_2 : Basta trocar x_1 , por x_2 e vice-versa.
 - (c) Simetria em relação à origem: $F(x_1, x_2) = F(x_1, -x_2)$.
6. **Inversão do Tempo:** Para obter um movimento do sentido inverso do tempo basta trocar t por $-t$. Como consequência, basta integrar ou simular numericamente a equação $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Pode-se assim obter curvas em torno de ciclos-limite instáveis ou de nós e focos instáveis.

3.3 Métodos das Isóclinas

A função $F(x_1, x_2) = \frac{f_2}{f_1}(x_1, x_2)$ definida anteriormente, é a tangente a uma curva de fase passando pelo ponto (x_1, x_2) . O lugar geométrico dos pontos de plano de fase onde a inclinação é constante e igual a α é dado pela equação $F(x_1, x_2) = \alpha$ que define uma curva ou uma família de curvas (isóclinas). Um exemplo simples é o sistema mola-massa descrito por (3.44) para o qual temos (3.45). Portanto, a isóclina de inclinação α é uma reta de inclinação $-\alpha$, isto é, $x_2 = -\alpha x_1$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$F(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{x_2} \quad (3.45)$$

Ao traçar diversas isóclinas pode-se com facilidade esboçar o retrato de fase conforme mostrado na figura 3.3.

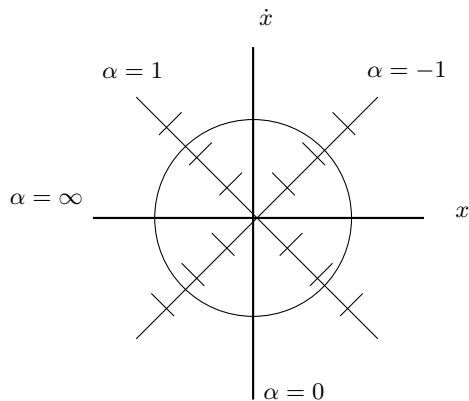


Figura 3.22. Isóclinas para o sistema massa-mola.

Exemplo 3.6: Equação de Van der Pol. A equação de van der Pol (3.46), pode ser escrita em espaço de estados, definindo os estados como sendo $x_1 \triangleq x$ e $x_2 \triangleq \dot{x}$, obtendo (3.47).

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{3.46}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{cases} \tag{3.47}$$

Neste caso temos $F = \frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} + \epsilon(1 - x_1^2)$, sendo as isóclinas de inclinação α dadas por:

$$x_2 = -\frac{x_1}{\alpha - \epsilon(1 - x_1^2)}$$

A figura 3.23 mostra o diagrama de fase da equação de van der Pol com ciclo estável para $\epsilon = 0, 2$ e $\epsilon = 1$. ★

Tabela 3.1. Expressões analíticas para as isóclinas do sistema (3.47).

Isóclinas	α
$x_2 = -\frac{x_1}{-\epsilon(1-x_1^2)}$	0
$x_2 = -\frac{x_1}{-1-\epsilon(1-x_1^2)}$	-1
$x_2 = -\frac{x_1}{-5-\epsilon(1-x_1^2)}$	-5
$x_2 = -\frac{x_1}{1-\epsilon(1-x_1^2)}$	1
$x_2 = 0$	∞

3.4 Círculos-Limites

Uma oscilação ocorre quando existe uma solução periódica não constante satisfazendo $x(t+T) = x(t) \forall t \geq 0$. É claro que a curva de fase correspondente é uma curva fechada formada de pontos regulares. Este conceito se aplica a sistemas de dimensão qualquer. O plano entretanto é geometricamente especial pois uma curva fechada o divide em duas regiões **invariantes**, uma interna e a outra

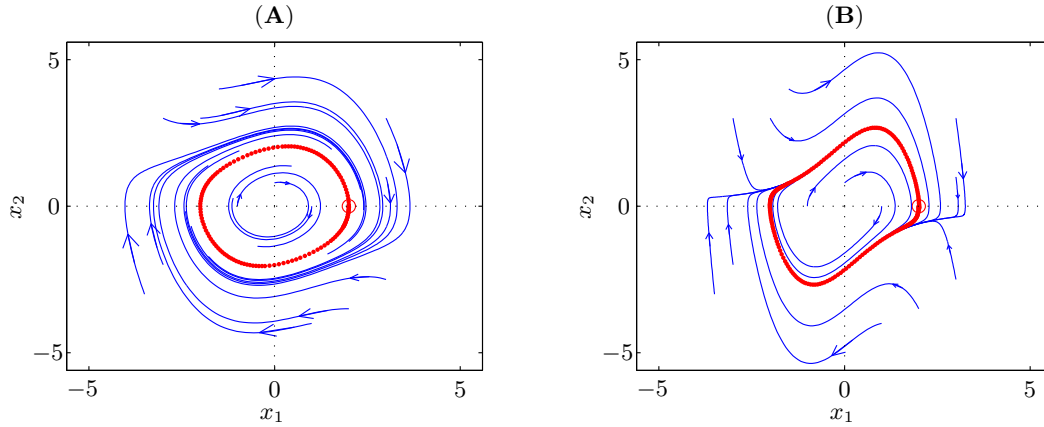


Figura 3.23. Plano de fase para a equação de van der Pol. Em (A) tem-se $\epsilon = 0,2$ e em (B), $\epsilon = 1$. Em ambos os casos o ciclo é estável.

externa. Esta propriedade é fundamental na teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias no plano, desenvolvida por Poincaré e Bendixson. Os principais resultados dessa teoria são, o Teorema de Poincaré–Bendixson, o critério de Bendixson e o método do índice.

Lema 3.1: (Critério de Poincaré–Bendixson) *Considere o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, e com \mathbf{f} continuamente diferenciável e seja \mathcal{M} um subconjunto limitado e fechado do plano tal que:*

- \mathcal{M} não contém pontos de equilíbrio, ou contém apenas um ponto de equilíbrio tal que a matriz Jacobiano $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ nesse ponto tenha autovalores com parte real positiva — o ponto de equilíbrio e um foco ou nó **instável**.
- \mathcal{M} é **invariante**, isto é, toda trajetória iniciada em \mathcal{M} fica em \mathcal{M} para todo tempo futuro.

Então \mathcal{M} contém uma ou mais órbitas periódicas do sistema considerado. ■

Este lema significa que se uma trajetória fica aprisionada dentro de uma região finita e fechada e se ela não pode convergir para nenhum ponto singular, já que por hipótese, não existe ou é um foco ou nó instável, então só pode convergir para uma simples curva fechada. Assim tem-se a importância deste resultado porque se excluem soluções mais complexas mesmo sendo o sistema bastante geral.

A figura 3.24 ilustra o Lema 3.1 pelo qual existe ao menos uma solução periódica — curva de fase dentro da região anular para onde apontam os vetores de campo.

Na figura 3.24, \mathcal{M} poderia ser todo o interior da curva poligonal. Outra aplicação do Lema 3.1 está ilustrada na figura 3.25.

Dentro da região anular \mathcal{M} da figura 3.25 existe um ciclo-limite se o único ponto singular for o ponto $\mathbf{0}$, isto é, dentro de \mathcal{M} não existe ponto singular.

Fato 3.1: Dentro de um ciclo limite existe, ou apenas uma singularidade, ou nenhuma. ◇

Lema 3.2: (Critério de Bendixson) *Se em uma região simplesmente conexa \mathcal{D} — ver [?], página 67 — do plano de fase, se o divergente de \mathbf{f} — equação (3.48) — não for identicamente nulo e não mudar de sinal, então o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ não possui ciclo-limite inteiramente contido em \mathcal{D} .*

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad (3.48)$$

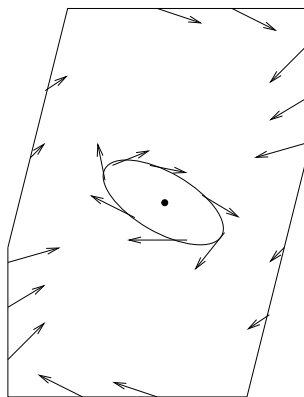


Figura 3.24. O conjunto M de forma anular em torno do ponto central que é um nó ou foco instável satisfaz o Lema 3.1.

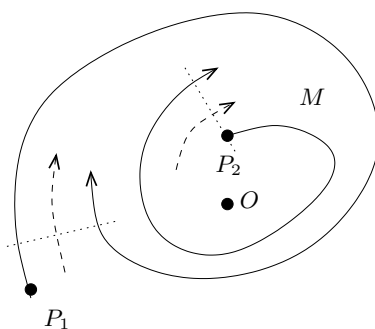


Figura 3.25. Determinação de uma região M — ver lema 3.1 — com duas curvas de fase iniciadas em P_1 e P_2 .

■

A demonstração do lema 3.2 é baseada no Teorema de Green. Uma explicação intuitiva é a seguinte: o divergente em cada ponto do plano representa a taxa de variação de um elemento infinitesimal de área em torno deste ponto quando transformado pelo fluxo gerado definido pela equação $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ao longo do tempo.

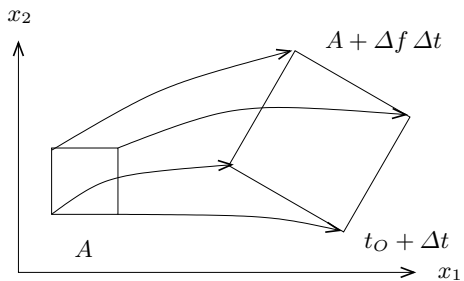


Figura 3.26. O significado do divergente de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Observação 3.5: $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é o traço da matriz Jacobiano. Como a área delimitada por um ciclo-limite é invariante no tempo, $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ necessariamente não pode ter sinal fixo pois implicaria na área aumentar ou diminuir com o tempo. \blacklozenge

Exemplo 3.7: Seja o sistema não-linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 - x_1^2x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

Pela equação (3.48), seu divergente é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 + b - x_1^2 = b - x_1^2$$

★

Tal sistema não tem ciclo-limite se $b < 0$ e se $b > 0$ o ciclo-limite deve necessariamente sair da faixa $-\sqrt{b} < x_1 < \sqrt{b}$.

Lema 3.3: (Índice de Poincaré)

- O índice de um nó, foco ou centro é +1
- O índice de uma sela é -1 — ambos autovalores não-nulos.
- O índice de uma órbita fechada é +1.
- O índice de uma curva fechada — não necessariamente trajetória — que não circunda nenhum ponto de equilíbrio é nulo.
- O índice de uma curva fechada — não necessariamente trajetória — é igual à soma dos índices das singularidades que ela circunda. \blacksquare

Corolário 3.1: Dentro de qualquer órbita periódica deve existir ao menos um ponto de equilíbrio. Suponha que a órbita só circunda singularidades hiperbólicas, isto é, sem autovalores sobre o eixo imaginário. Seja N o número de nós e focos e S o número de selas dentro da órbita fechada. Então, a relação é escrita como: $N - S = 1$. \blacksquare

Os dois últimos resultados sobre o índice de Poincaré são normalmente úteis para excluir a existência de ciclo-limite em certas regiões do plano de fase.

Exemplo 3.8: Seja o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 2x_1x_2 \end{cases} \quad (3.49)$$

O sistema (3.49) acima possui duas singularidades em $\mathbf{v}_1 \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com respectivas matrizes Jacobiano dadas por:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{v}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{v}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma **sela** e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um **foco estável**. Pode então existir um ciclo-limite circundando apenas o foco.

Não pode haver um ciclo-limite circundando ambas as singularidades. \blackstar

4

Sistemas Lineares por Partes

4.1 Introdução

Muitos sistemas de controle podem ser modelados por equações diferenciais lineares, isto é, sistemas que são lineares da forma (4.1) se $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i$, sendo \mathcal{D}_i um domínio de espaço de estados e $\bigcup_{i=1, \dots, n} \mathcal{D}_i = \mathbb{R}^n$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Eventualmente os valores de A_i e b_i podem depender da história passada do sistema como é o caso em que se tem histerese. Vamos nos ater a um caso específico que permite ilustrar as idéias mais importantes para tratar de tais sistemas. Consideramos o servomecanismo ilustrado na figura 4.1 e por simplicidade suporemos a entrada nula, ou seja, $e(t) = 0$ onde \mathcal{R} é um relé e a planta pode representar, por exemplo, um motor e sua saída pode representar o ângulo do eixo do motor. O relé \mathcal{R} pode ter valor M , $-M$ ou 0 conforme o seu estado.

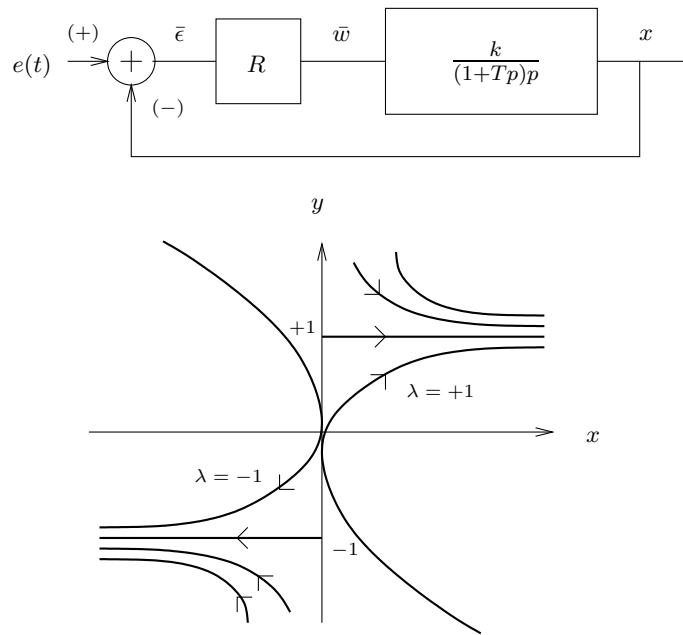


Figura 4.1. Servomecanismo a relé com retrato de fase.

Então, fazendo a normalização $x = (MkT)\bar{x}$ e $t = \frac{\bar{t}}{T}$, definimos $y = \frac{d}{d\bar{t}}x$. Assim sendo, obtemos as equações (4.2) sendo o valor de λ definido conforme a lógica de comutação do relé.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = -\lambda \\ \dot{y} + y = \lambda \end{cases} \quad \lambda = 1, -1 \text{ ou } 0 \quad (4.2)$$

A figura 4.1 mostra as curvas geratrizes do plano de fase. Tais curvas geram o plano de fase (x, y) do sistema (4.3) para $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, bastando transladar as curvas geratrizes na direção do eixo x .

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + \lambda \end{cases} \quad (4.3)$$

Para nos convenceremos disso basta verificar que se $(x^*(t), y^*(t))$ representa uma trajetória então $(x^*(t) + c, y^*(t))$ também é, independente da constante c . As expressões analíticas das curvas geratrizes são dadas a seguir.

A solução do sistema (4.2) — ver [?] — pode ser apresentada de duas formas:

Forma Paramétrica: As funções x e y são funções do paraâmetro t . Matematicamente tem-se: $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{-t} + \lambda(1 - e^{-t}) \\ x &= x_0 + y_0 - y_0 e^{-t} + \lambda t - \lambda(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

Forma Não-Paramétrica

$$x + y = x_0 + y_0 + \lambda \ln \left(\frac{y_0 - \lambda}{y - \lambda} \right)$$

Para $\lambda = 0$ temos segmentos de retas dados por: $x + y = x_0 + y_0$.

4.2 Procedimento Geral para Análise de Sistemas Lineares por Partes

Este procedimento é dado pelas seguintes etapas:

- Estabelecer o retrato de fase de cada estrutura linear (4.1).
- Identificar no plano de fase os domínios \mathcal{D}_i . Nas fronteiras desses domínios ocorrem as comutações de uma estrutura para outra.
- Traçar o plano de fase completo “emendando” as curvas de cada região de modo que cada trajetória seja contínua.

4.2.1 Caso do Relé Ideal

Seja a função de um relé ideal dada por (4.4). O domínio \mathcal{D}_1 é o semiplano lateral direito, onde $\lambda = -1$ e o domínio \mathcal{D}_2 é o semiplano lateral esquerdo, onde $\lambda = +1$. A reta de comutação é portanto $x = 0$ que é onde a descontinuidade de $F(x)$ ocorre. O plano de fase completo desse caso está apresentado na figura 4.2.

$$F(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x < 0 \text{ ou } \epsilon > 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \text{ ou } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Vemos que o servomecanismo se comporta adequadamente convergindo para o origem a partir de qualquer condição inicial. Note que a ordenada dos pontos de interseção da trajetória de fase com eixo y vai decrescendo. Daí conclui-se pela convergência à origem. Este método de análise de

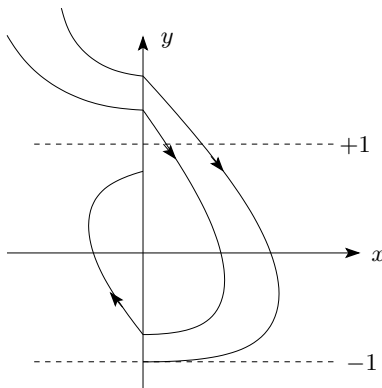


Figura 4.2. Plano de fase do servomecanismo a relé com relé ideal.

estabilidade de oscilação ou desequilíbrio denomina-se “método da superfície de secção de Poincaré” — no caso, a superfície é simplesmente o eixo y ($x = 0$). Reduz-se assim o problema original à análise da equação diferencial de segunda ordem a uma recorrência de primeira ordem. Note que a frequência de comutação do sinal de controle vai tendendo a infinito na medida em que o sistema tende para a origem do plano de fase.

Exercício 4.1: Realizar a simulação e verificar que o problema original à análise da equação diferencial de segunda ordem reduz-se ao caso de primeira ordem.

4.2.2 Relé com Zona Morta

O plano de fase deve incluir agora $\lambda = 0$. Para $\lambda = 0$ temos um plano de fase trivial formado de retas inclinadas a -45° pois:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

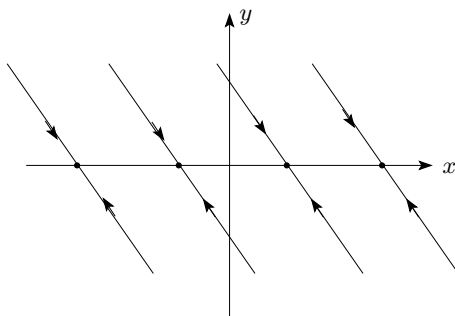


Figura 4.3. Plano de fase do relé de zona morta para $\lambda = 0$.

Note-se que existe toda uma reta de equilíbrio $y = 0$ para a qual tendem todas as trajetórias de fase. Neste caso temos o plano dividido em três domínios \mathcal{D}_{-1} , \mathcal{D}_0 e \mathcal{D}_{+1} , correspondentes respectivamente de $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

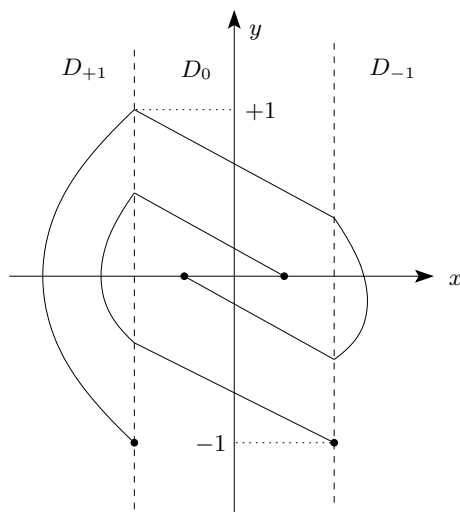


Figura 4.4. Plano de fase para relé com zona morta de largura $2a$.

Observamos, no plano de fase, que todas as trajetórias convergem para **algum** ponto de equilíbrio do segmento de equilíbrio $\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$. Isto significa que após um número finito de comutações, o sinal de controle torna-se constante e igual a zero. O erro de regime é inferior em módulo ao parâmetro a .

4.2.3 Relé com Histerese

Neste caso, o valor de λ assumido na região $x \in (-a, a)$ depende da história anterior do relé. O plano de fase parcial do relé com histerese é apresentado na figura 4.6.

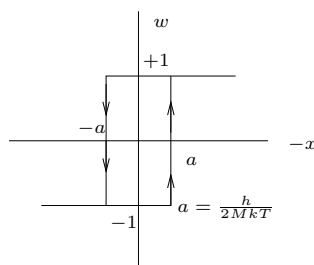


Figura 4.5. Relé com histerese.

Analisando-se a transformação pontual $P_1 \rightarrow P_2$ — ou $P \rightarrow P_1$ — definida na figura 4.6 conforme o método das transformações pontuais de Poincaré, pode-se concluir que existe um ciclo-limite estável.

A figura 4.7 mostra o plano de fase completo neste caso. Note que de uma mesma condição inicial sobre o segmento \overline{BA} do eixo x podemos ter duas soluções partindo em sentidos opostos, isto

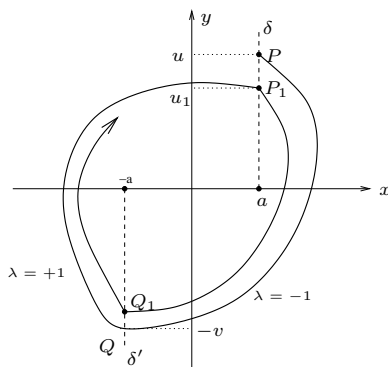


Figura 4.6. Plano de fase parcial para o relé com histerese.

porque não tratamos de um sistema Lipschitz uma vez que, além de o relé ser descontínuo, no caso de histerese, o seu estado não é univocamente definido por x .

Observação 4.1: A existência da solução periódica é simples de verificar graficamente. ♦

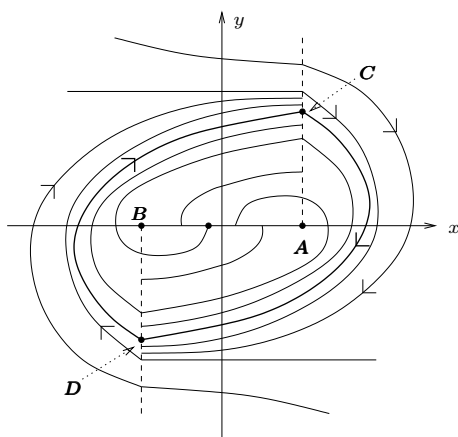


Figura 4.7. Plano de fase completo do relé com histerese.

4.2.4 Outros Exemplos

- Reestudar cada caso anterior do servomecanismo a relé usando realimentação taquimétrica — isto é, um compensador Proporcional-Derivativo (PD).
- Considerar realimentação linear com saturação.
- Considerar um sistema de primeira ordem realimentado com controlador proporcional-integral (PI) com saturação de controle, usando ou não um dispositivo de *anti-reset wind up*.

5

Teoria de Estabilidade

5.1 Introdução

A estabilidade de um sistema de controle é uma propriedade fundamental a ser garantida. Um exemplo de sistema estável bem familiar é um pêndulo. A necessidade de estabilidade fica clara se pensarmos no controle automático de uma aeronave que deve resistir a perturbações de vento. Após uma rajada de vento, o sistema de controle deve fazer com que a aeronave volte ao ponto de operação desejado. Todo sistema de controle, seja linear ou não-linear, envolve um problema de estabilidade que deve ser cuidadosamente estudado.

No final de século XIX, o matemático russo Alexander Mikhailov Lyapunov propôs uma abordagem geral para a análise de estabilidade extremamente útil e poderosa na área de Controle.

- **Primeiro Método:** Linearização para análise local.
- **Segundo Método:** O método direto, que pode ser aplicado para análise global.

O sistema considerado é dado na forma geral mostrada na equação (5.1) onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

Para sistemas de controle, temos o modelo matemático dado pela equação (5.2) onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.2)$$

Para uma lei de controle específica do tipo (5.3), tem-se que o modelo matemático recai no anterior conforme a equação (5.4).

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

5.1.1 Sistemas Autônomos

No que segue, vamos nos limitar ao caso de sistemas autônomos, que são descritos por uma equação do tipo (5.5), ou seja, para os quais o campo vetorial independe do tempo. Isto equivale a dizer que vamos apenas considerar sistemas invariantes no tempo.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

A teoria de Lyapunov se estende para o caso não-autônomo mas é bem mais complicada teoricamente. A teoria de estabilidade de sistemas variantes no tempo é destinada a cursos mais avançados sobre o assunto.

5.1.2 Análise de Estabilidade em Torno de um Ponto de Equilíbrio

Dado um ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* , considere-se o vetor de erros $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$. Então a equação de estado pode ser reescrita em termos do vetor \mathbf{y} resultando em (5.6).

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*) \quad (5.6)$$

Observação 5.1: Note que $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ é ponto de equilíbrio de $\dot{\mathbf{y}}$. ♦

5.1.3 Estabilidade de um Movimento Nominal

Ao invés de um simples ponto de equilíbrio, podemos considerar um movimento específico $x^*(t)$ (variante no tempo), por exemplo, o movimento de um telescópio ou radar para rastreamento de um objeto móvel. Neste caso, com o erro de movimento definido pela equação (5.7), chegamos à equação do erro dada pro (5.8).

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \quad (5.7)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{e}, t) - f(\mathbf{x}^*, t) = g(\mathbf{e}, t) \quad (5.8)$$

Note-se novamente que $\mathbf{e}^* = 0$ é um ponto de equilíbrio de (5.8), porém em geral a equação do erro é variante no tempo.

5.1.4 Redução à Estabilidade da Origem

Vimos acima que podemos reduzir a análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio ou de um movimento nominal à análise da estabilidade da origem do espaço de erros.

Exemplo 5.1: Ver Exemplo 3.2 de [?], página 47. ★

5.2 Conceitos de Estabilidade

Inicialmente vamos introduzir a notação: $B_R = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < R\}$ — bola aberta de raio R ; $S_R = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = R\}$ — esfera de raio R . A seguir damos diversas definições básicas.

5.2.1 Tipos de Estabilidade

Definição 5.1: (Estabilidade) O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é dito ser **estável** se, $\forall R > 0, \exists r > 0$, tal que, se $\|\mathbf{x}(0)\| < r$, então $\|\mathbf{x}(t)\| < R, \forall t \geq 0$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é **instável**.

Em notação matemática tem-se: O ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável se:

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, \forall t \geq 0$$

ou, ainda se:

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \mathbf{x}(0) \in B_r \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B_R, \forall t \geq 0$$

▲

Observação 5.2: No plano de fase verificamos que:

- Centro e Foco estável são estáveis.
- Sela e Nó instável são instáveis. ◆

Definição 5.2: (Estabilidade Assintótica) O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável (AE) se for estável e, além disso, se existir algum $r > 0$ tal que, $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ implica que $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ quando o tempo t tende para infinito. ▲

Definição 5.3: (Domínio de atração) Suponha-se que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável (AE). O domínio de atração é o conjunto de pontos tal que, se as condições iniciais do sistema pertencerem a esse conjunto, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$. ▲

Definição 5.4: (Atratividade) O equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é atrativo se existe um número $r > 0$ tal que se $\mathbf{x}(0) \in B_r$, então $\mathbf{x}(t)$ tende a zero. ▲

Observação 5.3: A atratividade não implica em estabilidade — ver figura 5.1. Assim, a estabilidade assintótica requer atratividade e estabilidade. ◆

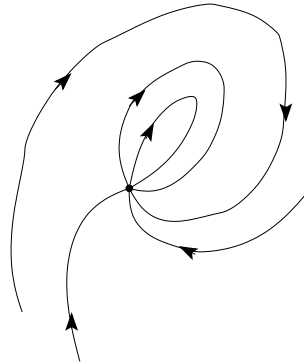


Figura 5.1. Exemplificação de atratividade sem estabilidade.

Definição 5.5: (Estabilidade Exponencial) Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é exponencialmente estável (EE) se existirem dois números α e λ tais que:

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \forall t > 0 \\ \alpha \geq 1 \end{cases}$$

para qualquer $\mathbf{x}(0) \in B_r$ para algum $r > 0$. ▲

Observação 5.4: (1) Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é (EE), então é também (AE) mas não o contrário. (2) Se $\alpha \geq 1$ é um parâmetro que está ligado com “overshoot”. Quanto maior for α maior pode ser o “overshoot”. ◆

Exemplo 5.2: Seja a equação não-linear (5.9) com solução dada por (5.10).

$$\dot{x} = -(1 + \sin^2(x))x \tag{5.9}$$

$$x(t) = x(0) e^{-\int_0^t [1 + \sin^2(x(\delta))] d\delta} \tag{5.10}$$

O módulo de (5.10) é dado por:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{-t} \quad x = 0EE$$

Este sistema é exponencialmente estável (EE). ★

Exemplo 5.3: Seja a equação não-linear:

$$\dot{x} = -x|x|$$

$$x(0) = 1 \rightarrow x(t) = \frac{1}{1+t}$$

$x = 0$ é AE, mas não é EE! A resposta decresce em uma taxa menor que a exponencial! ★

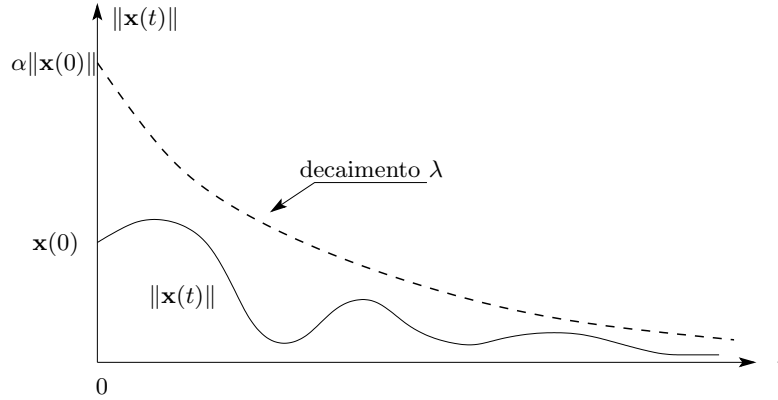


Figura 5.2. Sistema exponencialmente estável.

5.2.2 Estabilidade Local e Global

As definições acima são locais no sentido em que se aplicam a uma vizinhança possivelmente (mas não necessariamente pequena) de origem.

Definição 5.6: Se a propriedade de ser AE (ou EE) valer para qualquer condição inicial, o equilíbrio é dito **globalmente** AE (ou EE). ▲

Observação 5.5: Usaremos as siglas (GAE) ou (GEE) respectivamente. ◆

Observação 5.6: Para **sistemas lineares invariantes no tempo** — SLIT sempre verifica-se as seguintes características:

- Estabilidade Assintótica (EA) e Estabilidade Exponencial (EE) são sempre **GLOBAIS**.
- Estabilidade Assintótica (EA) **implica** em Estabilidade Exponencial (EE). ▲

5.3 Linearização e Estabilidade Local

O primeiro método de Lyapunov formaliza a análise local de estabilidade via uma aproximação linear de sistema. Por expansão em série de Taylor temos a equação (5.11), onde $\mathbf{f}_{t.o.s.}(\mathbf{x})$ representa termos de ordem superior em \mathbf{x} (por exemplo: \mathbf{x}_1^2 , $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2$, etc.).

$$\dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{t.o.s.}(\mathbf{x}) \quad (5.11)$$

Podemos desprezar $\mathbf{f}_{t.o.s.}(\mathbf{x})$? Quando? O primeiro método responde.

A matriz Jacobiano $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$ é o que permite, em geral, concluir a estabilidade ou a instabilidade. Isto é formalizado no teorema 5.1

Teorema 5.1: Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio do sistema não-linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e D é uma vizinhança de origem. Seja a matriz \mathbf{A} dada por (5.12).

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (5.12)$$

Então verificam-se os seguintes itens:

- (1) A origem é assintoticamente estável se $\Re \lambda_i < 0$, para todos os autovalores da matriz \mathbf{A} .
 (2) A origem é instável se $\Re \lambda_i > 0$, para todos os autovalores da matriz \mathbf{A} . ■

Observação 5.7: Nada se pode concluir de $\Re \lambda_i \leq 0$ e $\exists j$ tal que $\Re \lambda_j = 0$. São os casos críticos para os quais a propriedade de estabilidade depende crucialmente dos termos de ordem superior que então **não** podem ser desprezados. ◆

Exemplo 5.4: Seja o sistema escalar $\dot{x} = ax^3$. Neste caso $\lambda = 0$ e não se pode concluir da linearização $\dot{x} = 0$. Entretanto, pode-se neste caso de ordem 1 concluir que, $x = 0$ é assintoticamente estável se $a < 0$, instável se $a > 0$ e apenas estável se $a = 0$. ★

Quando o ponto de equilíbrio estudado se encontra fora da origem, basta transladar a origem do sistema de coordenadas para o ponto de equilíbrio de interesse fazendo a transformação de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$.

Passa-se a considerar a equação do erro, ou seja:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{e}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \triangleq \mathbf{F}(\mathbf{e})$$

naturalmente verifica-se que $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e que $\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}=\mathbf{0}}$ e $\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$. Portanto, para se analisar localmente a estabilidade de um ponto de equilíbrio qualquer \mathbf{x}^* basta, em geral, examinar a matriz Jacobiano calculada no ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* .

Exemplo 5.5: Aplicando para o pêndulo amortecido dado por (5.13), onde a e b são constantes positivas não-nulas.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\arcsin(x_1) - b x_2 \end{cases} \quad (5.13)$$

A matriz Jacobiano — definida por 3.37 — para este sistema é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1) & -b \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Para determinar a estabilidade da origem, calcula-se a matriz (5.14) no ponto de equilíbrio.

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

A matriz (5.15) é uma matriz de Hurwitz pois seus autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$$

A origem é portanto assintoticamente estável (AE).

Instabilidade do ponto de equilíbrio: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$. A matriz (5.14) calculada para este ponto de equilíbrio resulta em (5.16).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +a & -b \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Para a matriz (5.16), os autovalores são $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$. Estes autovalores são reais e de sinais contrários (sela). Logo tem-se que o ponto de equilíbrio $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ é **instável**. ★

5.3.1 O Método Direto de Lyapunov

A filosofia básica do método direto de Lyapunov é uma extensão matemática de uma observação física fundamental. Se a energia total de um sistema mecânico (ou elétrico) é continuamente dissipada, então o sistema, linear ou não-linear, deve eventualmente voltar ao ponto de equilíbrio.

Exemplo 5.6: Sistema mola-massa-amortecedor não-linear.

$$m\ddot{x}_1 + \underbrace{b\dot{x}_1\|\dot{x}_1\|}_{\substack{\text{amortecimento} \\ \text{não-linear}}} + \underbrace{k_0x_1 + k_1x_1^3}_{\text{mola não-linear}} = 0$$

A energia mecânica total — a partir do vetor de estados definido por (5.17) — é dada pela equação (5.18).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \int_0^x (k_0x_1 + k_1x_1^3) dx \quad (5.18)$$

★

Ao longo de uma trajetória $V(x(t))$ tem-se uma função no tempo cuja derivada pode ser calculada pela regra da cadeia:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V^T}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial V^T f(x(t))}{\partial x}$$

Na forma completa em termos de t temos:

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \left(\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

Independente de quem seja $\mathbf{x}(t)$ temos a equação (5.19), isto significa que a derivada de $V(\mathbf{x}(t))$ ao longo de uma trajetória (solução) de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ depende do vetor de estado num dado instante t , e não de toda a solução.

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V^T(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (5.19)$$

Esta observação é chave no método direto que assim é denominado por não utilizar a solução do sistema, isto é, não necessita integrar as equações diferenciais. A estabilidade é concluída apenas pela análise do sinal de $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}$ conforme calculado por (5.19). No caso do sistema mola-massa-amortecedor do exemplo 5.6, temos (5.20).

$$\frac{dV(t)}{dt} = [(k_0x_1 + k_1x_1^3) x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -bx_2 - (k_0x_1 + k_1x_1^3) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Esta equação (5.20) resulta em $\frac{dV(t)}{dt} = -bx_2^2 \leq 0$, onde $V(t)$ simboliza $V(\mathbf{x}(t))$, por simplicidade de notação. Nota-se que $\dot{V} = \frac{dV(t)}{dt} \leq 0$ independente da solução específica $\mathbf{x}(t)$. Isto significa que a energia total em geral decresce e espera-se que o sistema convirja ao mínimo da função de energia que ocorre em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Introduzimos a notação de Newton em substituição à notação de Leibnitz para mais simplicidade.

$$\dot{V} \triangleq \frac{dV}{dt} = \frac{dV(x(t))}{dt}$$

Para que uma função $V(\mathbf{x})$ seja adequada para análise de estabilidade, ela deve ter sinal positivo a menos da origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Assim temos a seguinte definição:

5.3.2 Funções Positivas Definidas

Definição 5.7: (Função Positiva Definida) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, contínua é dita (localmente) positiva definida se $V(\mathbf{0}) = 0$ e em uma bola de raio R_0 . Matematicamente, tem-se:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$$

Se $V(\mathbf{0}) = 0$ e a propriedade acima valer para todo vetor \mathbf{x} , então a função $V(\mathbf{x})$ é dita **globalmente** positiva definida. ▲

A figura 5.3 ilustra a definição 5.7 em uma representação gráfica.

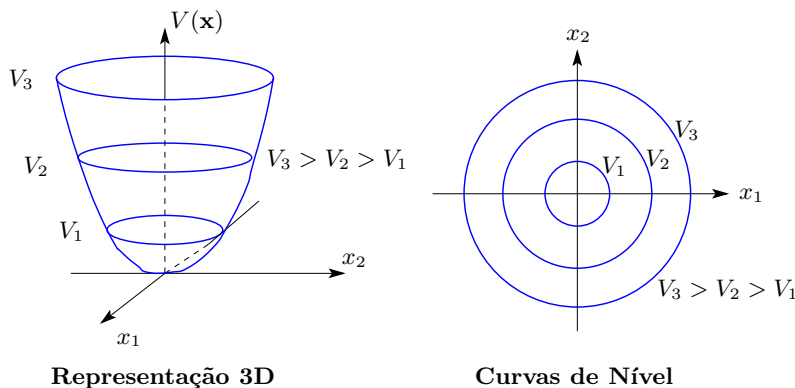


Figura 5.3. Representação geométrica de uma função positiva definida.

Exemplo 5.7: Seja a função:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}MR^2x_2^2 + MRg(1 - \cos(x_1))$$

Esta função é (localmente) positiva definida, porém não é globalmente positiva definida. ★

Definição 5.8: (Função Positiva Semi-Definida) Uma função escalar contínua $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita positiva semi-definida se em uma bola de raio R_0 , $V(\mathbf{x}) \geq 0$. ▲

Observação 5.8: De maneira análoga, define-se função negativa definida ou semi-definida exigindo que $-V$ seja positiva ou semi-definida. ◆

Observação 5.9: A propriedade de “semi-definição” depende do espaço de estado considerado. ◆

Observação 5.10: Seja a função $V = -x_2^2$, então:

- Negativa semi-definida no espaço x_1 e x_2 — a variedade correspondente é similar a uma calha.
- Negativa definida no espaço x_2 . ◆

Observação 5.11: Notação simplificada para as definições 5.7 e 5.8:

$V > 0$: V é positiva definida

$V \geq 0$: V é positiva semi-definida

$V \not\geq 0$: V é indefinida

◆

Exemplo 5.8: A função V_1 é positiva definida, V_2 é negativa semi-definida e V_3 é indefinida em sinal.

$$V_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$V_2(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$$

$$V_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 \not\geq 0$$

★

5.3.3 Teorema Local de Estabilidade de Lyapunov

Este tópico apresentará o teorema local da estabilidade que pode ser encontrado em [?] e [?].

Teorema 5.2: *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e localmente positiva definida, tal que $\dot{V} \leq 0$. Então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável. Além disso, se $\dot{V} < 0$ então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável.*

■

A demonstração deste teorema está disponível em [?], página 115 e [?], página 62.

Exemplo 5.9: Pelo critério de Sylvester $V(\mathbf{x}) > 0$ se $a \geq \sqrt{5}$

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

★

Exemplo 5.10: Seja o sistema (5.21) onde $g \in \text{Lipschitz}$, $g(x) > 0 \forall x \neq 0$ e $x \in (-a, a)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -g(x) \\ g(0) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Usando uma função de Lyapunov do tipo $V = \int_0^x g(y) dy > 0$, sua derivada é $\dot{V} = -g^2(x) < 0$.

Conclusão: Este sistema é assintoticamente estável (AE).

★

Exemplo 5.11: Seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - b x_2 \end{cases} \quad (5.22)$$

Tomando como função de Lyapunov a energia mecânica do sistema (5.22) tem-se:

$$V = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2} x_2^2 > 0$$

A derivada desta função V é $\dot{V} = -b x_2^2 \leq 0$. Como esta função \dot{V} é negativa semi-definida, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável.

★

Observação 5.12: Com relação ao exemplo 5.11, ainda não podemos concluir que o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável (AE), mas podemos fazê-lo através de um resultado obtido por La Salle que será apresentado nas seções 5.3.6 e 5.3.7. \blacklozenge

Exemplo 5.12: Seja o sistema do pêndulo da equação (5.22) apresentado no exemplo 5.11 com outra função de Lyapunov V dada por (5.23), onde a matriz \mathbf{P} é positiva definida.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + a(1 - \cos(x_1)) \quad (5.23)$$

A função \dot{V} é dada por:

$$\dot{V} = a(1 - p_{22}) x_2 \sin(x_1) - a p_{12} x_1 \sin(x_1) + (p_{11} - p_{12} b) x_1 x_2 + (p_{12} - p_{22} b) x_2^2$$

Escolhendo $p_{22} = 1$, $p_{11} = b p_{12}$ e $0 < p_{12} < b$ temos (localmente) $V > 0$ e \dot{V} é escrita como:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} a b x_1 \sin(x_1) - \frac{1}{2} b x_2^2 < 0$$

Logo o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável (AE). \star

5.3.4 Teorema Global de Estabilidade

Para garantirmos que um sistema possui estabilidade global para um dado ponto de equilíbrio, não basta ter $V(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x}$ (exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Fato 5.1: Se o limite (5.24) for atendido, então o sistema tem a propriedade denominada **radialmente ilimitado**.

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (5.24)$$

\diamond

Teorema 5.3: Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que:

- $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$
- $\dot{V} < 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável (GAE). \blacksquare

Observação 5.13: Se a função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ atende ao fato 5.1, então o ponto de equilíbrio do sistema é globalmente estável. \blacklozenge

Veja um exemplo de aplicação do teorema 5.3 em [?] na página 124.

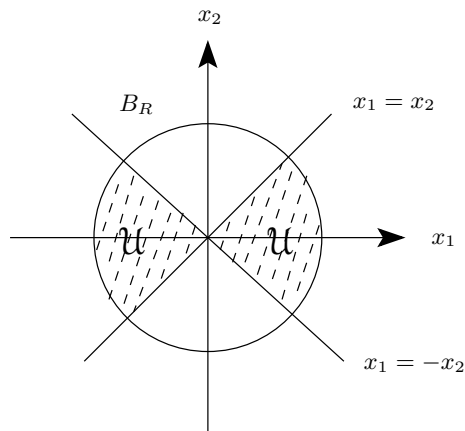


Figura 5.4. O conjunto \mathcal{U} para $V = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

5.3.5 Teorema da Instabilidade

Teorema 5.4: (Teorema da Instabilidade) *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável — classe C^1 — tal que $V(0) = 0$ e $V(\mathbf{x}_0) > 0$ para algum \mathbf{x}_0 com $\|\mathbf{x}_0\|$ arbitrariamente pequeno. Defina o conjunto \mathcal{U} conforme (5.25), e suponha que $\dot{V}(x) > 0$ em \mathcal{U} .*

$$\mathcal{U} = \{x \in B_r : V(\mathbf{x}) > 0\} \quad (5.25)$$

Então, o ponto \mathbf{x} é instável. ■

Teorema 5.5: (Teorema de Cetaev) *Sejam os corolários:*

Corolário # 1: *A função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ e sua derivada temporal são positivas definidas — $V(\mathbf{x}) > 0$ e $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$.*

Corolário # 2: *A função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ é indefinida em sinal — $V(\mathbf{x}) \geq 0$ — e sua derivada temporal é positiva ou negativa definida — $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ ou $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$.*

Se um destes corolários verifica-se, então o sistema é instável. ■

Exemplo 5.13: *Seja o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Com uma função de Lyapunov dada por $V = x_1 x_2 \geq 0$ e $\dot{V} = x_1^2 + x_2^2 > 0$. Pelo corolário # 2 do teorema 5.5 — de Cetaev — o sistema é instável. ★

5.3.6 O Princípio da Invariança — Teorema de La Salle

Vamos estender o resultado de Lyapunov para os casos $\dot{V}(x) \leq 0$ que implicam em **estabilidade assintótica**. A extensão foi obtida por La Salle [?] e é muito importante pois freqüentemente tem-se

apenas $\dot{V}(x) \leq 0$ e não $\dot{V}(x) < 0$. é o caso de V ser uma função de energia, conforme já verificamos no exemplo do pêndulo — exemplo 5.11, onde a derivada da função de Lyapunov é dada por (5.26).

$$\dot{V} = -bx_2^2 \leq 0 \quad (5.26)$$

Note que $\dot{V} < 0$ em toda parte exceto na reta $x_2 = 0$ onde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Para manter $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ a trajetória do sistema deveria ser confinada ao conjunto $N(\dot{V}) = 0$ que anula \dot{V} e isto só poderia ocorrer se $\dot{x}_1 = 0$ pois $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0$ como para as equações do pêndulo apresentadas no exemplo 5.11, desde que $x_1 \in (-\pi, \pi)$. Desta forma, para manter-se em $x_2 = 0$, a única opção é $x_1 = x_2 = 0$ — se $x_1 \in (-\pi, \pi)$. Espera-se então que o sistema tenda ao equilíbrio $x = 0$ que seria assintoticamente estável (AE). Esta conclusão foi formalizada pelo Teorema de La Salle.

Se uma solução $x(t)$ de $\dot{x} = f(x)$ é limitada e pertence a $D \forall t \geq 0$, então seu conjunto limite positivo L^+ é não vazio, compacto e invariante. A trajetória $\mathbf{x}(t)$ se aproxima de seu conjunto limite L^+ quando o tempo t tende para infinito.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow L^+$$

5.3.7 O Teorema de La Salle

Teorema 5.6: (Teorema de La Salle) *Seja $\Omega \subset D$ um conjunto positivamente invariante com relação a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω . Seja E o conjunto de todos os pontos de Ω onde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Seja \mathcal{M} o maior conjunto invariante em E . Então toda solução começando em Ω se aproxima de \mathcal{M} quando $t \rightarrow \infty$. Veja a figura 5.5.* ■

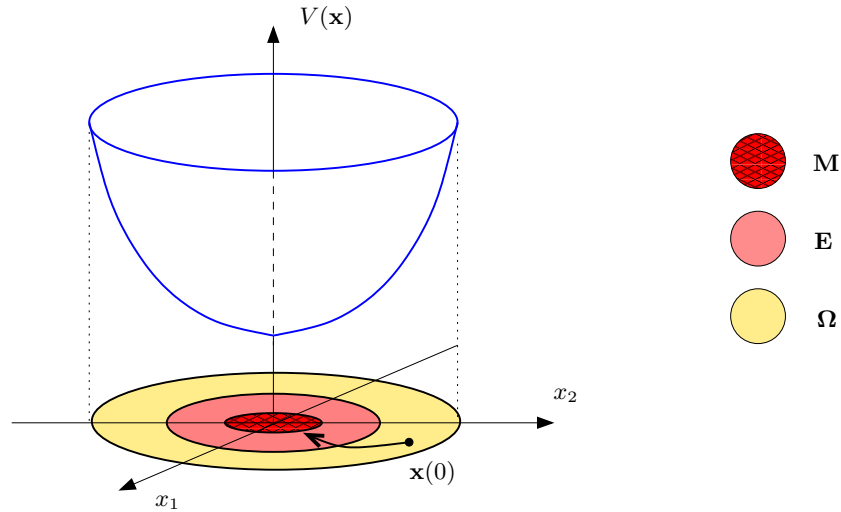


Figura 5.5. Convergência da trajetória para o conjunto invariante.

Observação 5.14: O conjunto Ω é positivamente invariante se $x(t_0) \in \Omega$ então $\mathbf{x}(t) \in \Omega \forall t \geq t_0$ ao longo de uma trajetória do sistema. ◆

Corolário 5.1: *Seja $\mathbf{x} = 0$ um ponto de equilíbrio de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e positiva não-nula em D contendo a origem $\mathbf{x} = 0$, tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em D . Seja $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ e suponha que nenhuma solução possa permanecer identicamente em S , além da solução trivial $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. Então a origem é **assintoticamente estável (AE)**.* ■

Corolário 5.2: Se no corolário 5.1 $D = \mathbb{R}^n$ e V for radialmente ilimitada então, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável (GAE). ■

Leia a referência [?] na página 129 para ver exemplos.

Exemplo 5.14: Mola e amortecedor não-lineares. Seja o sistema (5.27), sua aproximação linear

$$\text{é } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 - x_1^3 \end{cases} \quad (5.27)$$

Temos um sistema linear *instável* (verificar). No entanto, utilizando a função de energia

$$V = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} x^3 dx = \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} > 0$$

temos que:

$$\dot{V} = -x_2^4 \leq 0 \quad \text{no espaço } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como V é radialmente ilimitada e o maior conjunto invariante contido em $x_2 = 0$ é a origem (verificar), temos que a origem é globalmente assintoticamente estável (GAE).

Também, basta verificar que se $x_2(t) \equiv 0$ — isto é, $x \in \mathcal{N} \dot{V}$ — então:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv 0 \\ \dot{x}_2 &\equiv 0 \\ &\equiv -x_2^3 - x_1^3 \\ &\equiv -x_1^3 \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $x_1 \equiv 0$. ★

Veja o Exemplo 4.11 de [?]: A rede Hopfield (rede neural).

5.4 Análise de Estabilidade via Método Direto de Lyapunov

A dificuldade é encontrar uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ adequada. Felizmente uma grande classe de sistemas encontrados em teoria de controle aceita uma construção sistemática da função $V(\mathbf{x})$. é o caso dos sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT).

5.4.1 Análise de Lyapunov para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Fato 5.2: Para um sistema linear invariante no tempo (SLIT), a função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ pode ser escolhida sempre como uma forma quadrática do tipo:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

Onde a matriz \mathbf{P} é simétrica, isto é, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$. ◇

Fato 5.3: Se um sistema linear invariante no tempo (SLIT) possui a origem assintoticamente estável (AE), sua forma quadrática pode ser encontrada sistematicamente. ◇

Fato 5.4: Se a origem de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) é assintoticamente estável (AE), então esta origem também é exponencialmente estável (EE). \diamond

Observação 5.15: Dada uma forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$, sempre podemos substituir a matriz \mathbf{M} pela sua parte simétrica $\frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2}$ pois a forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ é equivalente a $\mathbf{x}^T \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} \mathbf{x}$. Assim podemos sempre supor a matriz \mathbf{P} simétrica conforme o fato 5.2. \blacklozenge

5.4.2 Forma Quadrática Positiva Definida: Interpretação Geométrica

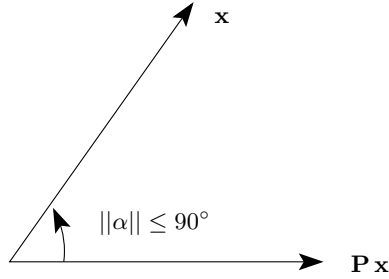


Figura 5.6. Propriedade de circuitos passivos não defasarem mais do que 90° .

Sejam os coeficientes de Rayleigh para uma matriz \mathbf{P} positiva definida dados por

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$$

A superfície $z = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ está confinada entre duas superfícies de revolução geradas por duas curvas quadráticas.

5.4.3 Teorema Fundamental do Caso Linear

Teorema 5.7: (Teorema Fundamental) Se \mathbf{A} é uma matriz de Hurwitz, isto é, $\Re(\lambda_i) < 0$, para todos os autovalores da matriz \mathbf{A} , se e somente se, dada qualquer matriz \mathbf{Q} positiva definida, existe uma matriz \mathbf{P} também positiva definida que satisfaça a equação de Lyapunov dada por:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

Além disso, se esta matriz \mathbf{A} é Hurwitz, a solução \mathbf{P} é única. A função de Lyapunov dada por $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0$ tem sua derivada dada por (5.28).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

■

Veja a demonstração do teorema 5.7 em [?], página 13 e em [?], página 82.

Exemplo 5.15: Seja a matriz \mathbf{A} abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz \mathbf{A} é Hurwitz, pois seus autovalores são todos negativos — $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Se usarmos uma matriz \mathbf{P} qualquer é provável que não tenhamos $\dot{V} < 0$. De fato, se $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, então a função $\dot{V}(\mathbf{x})$ não é definida em sinal.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Agora, dada a matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, podemos resolver a equação de Lyapunov para encontrar \mathbf{P} . Numéricamente, basta utilizar o comando do MatLab `lyap` para obter a solução.

```
>> P = lyap (A',Q)
```

Realizando os procedimentos via MatLab:

```
>> A = [-2 -1; 0 -1]
```

```
A =
```

```
    -2    -1
     0    -1
```

```
>> Q = eye(2);
```

```
>> P = lyap (A',Q)
```

```
P =
```

```
    0.3333   -0.1667
   -0.1667    0.5000
```

```
>> det(P)
```

```
ans =
```

```
    0.1389
```

```
>>
```

Obtem-se a matriz \mathbf{P} positiva definida. ★

É conveniente entender que a equação de Lyapunov leva a um conjunto de $\frac{n(n+1)}{2}$ equações lineares cujas incógnitas são os elementos da matriz \mathbf{P} — excetuando aqueles abaixo da diagonal principal, que são definidos por simetria. veja [?], página 137.

5.4.4 Funções de Lyapunov Motivadas Fisicamente

De um ponto de vista de engenharia, é possível encontrar métodos poderosos de análise de estabilidade de sistemas não lineares complexos aplicando a teoria de Lyapunov. Isto se faz através levando em conta as propriedades físicas do sistema, sobretudo em termos de dissipação de energia.

Exemplo 5.16: Controle de posição de um robô. As equações de Euler–Lagrange no espaço das coordenadas das juntas \mathbf{q} são dadas por (5.29).

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.29)$$

Os elementos da equação (5.29) são definidos como:

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vetor de posições das juntas.

\mathbf{b} forças de Coriolis e centrífugas causadas pelo movimento das juntas.

\mathbf{H} matriz de inércia do manipulador.

\mathbf{g} forças gravitacionais.

$\boldsymbol{\tau}$ vetor dos torques aplicados a cada junta.

★

Observação 5.16: O atrito intrínseco das juntas é desprezado.

◆

Uma lei simples de controle de posição é obtida usando-se um termo proporcional–derivativo (PD) e um termo de compensação da gravidade conforme a eq (5.30), onde \mathbf{K}_D e \mathbf{K}_P são matrizes simétricas e positiva definidas.

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_P \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (5.30)$$

Para analisar a estabilidade do sistema em malha fechada, construindo uma função da Lyapunov notamos que $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}$ representa a energia cinética do manipulador. Notamos ainda que o termo proporcional–derivativo (PD) introduz em cada junta um “amortecimento linear” (D) e uma “mola linear” (P). A energia potencial³ nas molas é dada por $\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q}$.

A candidata à função de Lyapunov V é dada por (5.31).

$$V = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q}) \quad (5.31)$$

Calculando \dot{V} temos (5.32).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \{ \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + 2\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2[\dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{b} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D \mathbf{q})] + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + 2\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q} \} \\ &= \frac{1}{2} [(-2\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}})] - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Pela propriedade da conservação de energia (estamos desprezando o atrito), temos que o termo entre colchetes é nulo. Assim, tem-se que:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}$$

Então, pelo teorema de La Salle, o equilíbrio $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável (AE). Como a função V é radialmente ilimitada, a estabilidade assintótica é global (GAE), conclusão nada trivial, tratando-se de um sistema bastante complexo.

5.4.5 Funções de Lyapunov do Tipo Lur’e

Lur’e formalizou o problema conhecido como o **problema de estabilidade absoluta**. Seja o sistema de controle da equação (5.33) com controle \mathbf{u} dado por $\mathbf{u} = -\psi(t, \mathbf{y})$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{cases} \quad (5.33)$$

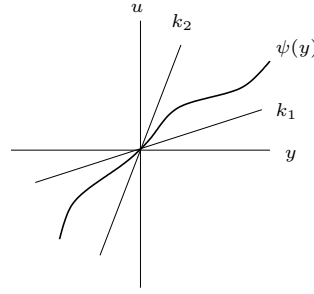


Figura 5.7. O setor $[k_1, k_2]$ da função ψ projetada no plano do domínio.

Suponha-se, para simplificar que $y \in \mathbb{R}$ e $u = \mathbb{R}$ e que ψ tenha seu gráfico, $\forall t$, contido em um setor cônico do plano (y, u) .

Devido à matriz \mathbf{D} tem-se uma malha algébrica que deve ter solução definida e única — ver [?].

O problema consiste em estabelecer condições para garantir que a origem seja (uniformemente) assintoticamente estável (AE) independente de ψ , desde que contida no setor $[k_1, k_2]$. Diz-se então que o sistema seria **absolutamente estável no setor** $[k_1, k_2]$. A motivação é que, na prática, a característica não-linear de algum dispositivo de controle freqüentemente não é perfeitamente conhecida, podendo inclusive variar de um sistema para outro — por exemplo: A característica de um atuador. Assim, o problema é importante pois a estabilidade deve ser garantida apesar da incerteza sobre ψ . Para solucionar este problema, a seguinte classe de funções foi proposta por Lur'e para sistemas multivariáveis com $y, u \in \mathbb{R}^p$ e para $\psi(t, y) = \psi(y)$, isto é, invariante no tempo.

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \sum_{i=1}^p \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma) d\sigma \quad (5.34)$$

Observação 5.17: A equação (5.34) é válida para $\mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ e $\psi(t, \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y})$, isto é, invariante no tempo. \blacklozenge

Tal função está intimamente ligada ao Critério de Popov que será tratado na subsecção 6.5.1. Em particular pode-se ter $\gamma_i \equiv 0$, isto é, é possível estabelecer condições para que uma simples forma quadrática leve a um resultado de **estabilidade absoluta**. Tal abordagem leva ao **Critério do Círculo** que será apresentado na secção 6.5.2. Por outro lado, poderíamos ter $p = n$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma) d\sigma \quad (5.35)$$

A equação (5.35) é conhecida como **função do tipo Persidski** — veja referência [?] — que permite solucionar o problema para sistemas do tipo de Persidski — equação (5.36) — onde $\psi_i \in (0, \infty)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = A\psi(x) \\ \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x_1) \\ \psi_2(x_2) \\ \vdots \\ \psi_n(x_n) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.36)$$

³ Como anulamos o efeito da gravidade, o robô em si deixa de acumular energia potencial.

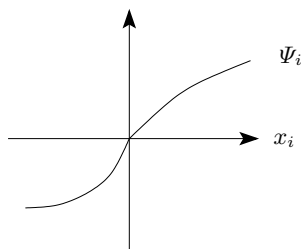


Figura 5.8. Ilustração da função do tipo Persidski.

5.5 Lema da Comparação

Lema 5.1: (Lema da Comparação) Se uma função real $W(t)$ satisfaz a desigualdade $\dot{W}(t) \leq \alpha W(t)$, onde α é um número real positivo, então:

$$W(t) \leq W(0) e^{-\alpha t}$$

■

Trata-se de um lema de comparação, pois considera a solução do sistema de comparação dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) \\ x(0) = W(0) \end{cases}$$

A solução deste sistema é $x(t) = W(0) e^{-\alpha t}$.

5.5.1 Análise de Desempenho

A teoria de Lyapunov pode também ser utilizada para estimar o comportamento transitório do sistema em termos da taxa de convergência e do “overshoot”.

5.5.2 Um Lema de Comparação

O seguinte lema de comparação é fundamental.

Lema 5.2: Se uma função real $W(t)$ satisfaz a desigualdade $\dot{W}(t) + \alpha W(t) \leq 0$, onde α é um mínimo real, então:

$$W(t) \leq W(0) e^{-\alpha t}$$

■

5.5.3 Estimativa do Transitório de Sistemas Lineares

Seja um sistema linear da forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, sabemos que existe um par (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) — ambas as matrizes são positivas definidas — que satisfaz a equação de Lyapunov $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ e que então $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ tem derivada $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.

Pela desigualdade de Rayleigh temos as desigualdades (5.37), (5.38) e (5.39).

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.37)$$

$$V(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.38)$$

$$V(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} V(\mathbf{x}) \quad (5.39)$$

Levando (5.39) em (5.37) obtemos (5.40).

$$\dot{V}(x) \leq \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} V \quad (5.40)$$

Utilizando o lema 5.2, obtemos (5.41) com $2\gamma = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}$.

$$V(t) \leq e^{-2\gamma t} V(0) \quad (5.41)$$

Agora, em termos de $\|\mathbf{x}\|$, substituindo (5.39) em (5.38), tem-se (5.42).

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{x}\|^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) e^{-2\gamma t} \|\mathbf{x}(0)\|^2 \quad (5.42)$$

Portanto obtemos a estimativa para o transitório:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}t} \|\mathbf{x}(0)\|$$

Onde $\|\mathbf{x}(t)\| \leq K e^{-\gamma t} \|\mathbf{x}(0)\|$ com $K \geq 1$.

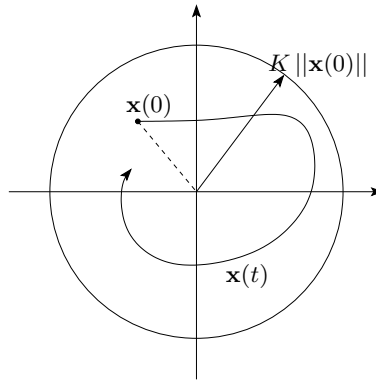


Figura 5.9. Ilustração gráfica de transitórios de sistemas lineares.

Observação 5.18: O parâmetro K está ligado ao “overshoot” que o sistema pode ter transitória-mente. ♦

Como escolher \mathbf{P} e \mathbf{Q} de modo a se ter a melhor estimativa de γ ? A pergunta vem do fato de que o par \mathbf{P} e \mathbf{Q} não é único. Dado qualquer \mathbf{Q} tem-se uma solução \mathbf{P} para a equação de Lyapunov. Então qual \mathbf{Q} escolher para se ter a maior razão $\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}$? Basta escolher $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (!) — ver [?].

5.6 Síntese de Controladores Baseada no Método Direto de Lyapunov

Nas seções anteriores apresentamos algumas abordagens de análise de estabilidade usando o método direto de Lyapunov. A lei de controle foi implicitamente suposta já estabelecida por algum método de projeto (síntese) ou já existentes em um fenômeno físico ou biológico — por exemplo, a regulação do nível de concentração de CO_2 pela respiração.

Na prática entretanto, freqüentemente procura-se uma lei de controle adequada para uma dada planta se comportar de maneira adequada. Por exemplo, se a planta é muito incerta (parâmetros desconhecidos ou variantes no tempo), uma lei de controle adaptativa é desejável, ou mesmo, necessária. Trata-se então do problema de síntese de controladores.

O método direto tem-se mostrado extremamente poderoso para resolver problemas de síntese de controladores e hoje em dia permeia toda a literatura moderna da área. Alguns exemplos são: controle adaptativo, controle robusto linear, controle robusto não-linear, controle deslizante, controle de sistemas híbridos (eventos contínuos e discretos), controle de robôs, controle de aeronaves, controle de processos etc. A idéia de utilizar o método direto para síntese é antiga.

Duas maneiras básicas de utilizar o método direto são praticadas, ambas com características de tentativa e erro. A primeira consiste em postular uma forma para a lei de controle e justificá-la (isto é, mostrar que leva a um sistema estável) através do método direto. A segunda consiste em postular uma forma para a função candidata de Lyapunov e encontrar uma lei de controle para que a função candidata seja uma verdadeira função de Lyapunov.

O exemplo do robô com controle proporcional-derivativo (PD) — exemplo 5.16 — ilustra a primeira abordagem. A segunda abordagem é ilustrada a seguir.

Exemplo 5.17: Considere-se o problema de estabilizar o sistema (5.43).

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u \quad (5.43)$$

Utilizando uma lei de controle u adequada, procura-se obter um sistema da forma de uma sistema mola-massa não linear — Veja [?], páginas 74 e 75 — conforme (5.44), onde $b(\dot{x})\dot{x} > 0$ com $\dot{x} \neq 0$ e $c(x)x > 0$ com $x \neq 0$, isto é, $b(\dot{x})$ e $c(x)$ pertencem ao setor infinito positivo — $c(x), b(\dot{x}) \in (0, \infty)$.

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0 \quad (5.44)$$

A função de Lyapunov natural para a equação (5.44) é a energia total do sistema conforme (5.45).

$$V(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x c(\sigma) d\sigma > 0 \quad (5.45)$$

cuja derivada satisfaz

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -\dot{x} b(\dot{x}) \leq 0$$

Pelo Teorema de La Salle, teríamos que a origem seria assintoticamente estável (AE).

Para que o sistema dado possa ficar na forma anterior e assim admitir a função de Lyapunov dada, vamos utilizar uma lei de controle que permite introduzir amortecimento e ação de mola não-lineares. Trata-se de uma lei de controle proporcional-derivativo (PD) não-linear, isto é:

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$$

Fechando-se a malha de controle, ficamos com:

$$\ddot{x} - [u_1(\dot{x}) + \dot{x}^3] + [x^2 - u_2(x)] = 0$$

Para que os termos u_1 e u_2 produzam amortecimento **positivo** e ação de mola **restitutiva** devem-se satisfazer as desigualdades:

$$\dot{x}(-\dot{x}^3 - u_1(\dot{x})) > 0 \quad \forall \dot{x} = 0$$

$$x(x^2 - u_2(x)) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Uma lei de controle que resolve o problema é dada por (5.46).

$$u(x, \dot{x}) = -2\dot{x}^3 - 5(x + x^3) \tag{5.46}$$

★

Exercício 5.1: Verifique que a lei (5.46) é válida para qualquer sistema do tipo $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x}^3 + \alpha_2 x^2 = u$ com $\alpha_1 > -2$ e $|\alpha_2| < 5$.

Para algumas classes de sistemas não-lineares, procedimentos sistemáticos foram obtidos pelas duas abordagens básicas. é o caso de:

1. Sistemas a Estruturas Variável com Controle Deslizante. [?], [?] e [?]
2. Sistemas Adaptativos com adaptação paramétrica. [?]
3. Projeto motivado pelas propriedades físicas do sistema (Robótica, Controle Aeroespacial). [?]
4. Sistemas Híbridos — Tempo contínuo/Tempo discreto — Funções de Lyapunov não-tradicionais. [?]
5. Método de Backstepping — [?] — para controle de sistemas não-lineares — funções de Lyapunov para Controle.

6

Passividade e Estabilidade Absoluta

6.1 Sistemas Lineares Positivos

Muitos sistemas podem ser vistos como um subsistema linear realimentado por um subsistema não-linear, ou vice-versa. Se a função de transferência do subsistema linear é **Real Positiva** — veremos que isso significa **passividade** — então ela tem propriedades importantes que levam à geração de uma função de Lyapunov para o sistema todo.

Vamos apresentar a seguir as propriedades/definições de Função de Transferência positiva real (PR) e estritamente positiva real (SPR).

6.1.1 Funções de Transferência Real Positivas

Seja uma função de transferência racional, causal com $n \geq m$ e dada por (6.1). O número $n^* = n - m$ é denominado **grau relativo**.

$$h(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (6.1)$$

Definição 6.1: (Transferência Positiva Real): A função de transferência $h(p)$ é positiva real (PR) se $\Re[h(p)] \geq 0 \forall p$ com parte real não-negativa — $\Re[p] \geq 0$.

$$\begin{cases} \Re[h(p)] \geq 0 \\ p \text{ com } \Re[p] \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

▲

Observação 6.1: A função de transferência $h(p)$ é estritamente positiva real (SPR) se $h(p - \epsilon)$ é positiva real (PR) para algum $\epsilon > 0$. ◆

A condição (6.2) significa que $h(p)$ tem sempre parte real positiva se $\Re[p] \geq 0$. Portanto a defasagem da resposta em frequência $h(j\omega)$ é sempre menor em módulo do que 90° — compare com a condição de positividade de uma matriz \mathbf{M} — seção 5.4.1. O conceito de positividade apareceu no contexto de teoria de circuitos, onde a função de transferência de um circuito passivo — só indutores, capacitores e resistores — é racional e real positiva. Na seção 6.4 veremos que positividade real e passividade são essencialmente equivalentes.

Exemplo 6.1: Veja [?], página 127. A função $h(p) = \frac{1}{p+\lambda}$ com $\lambda > 0$ é estritamente positiva real (SPR). A prova é verificada por cálculo direto. ★

Para sistemas de ordem maior, é difícil verificar a condição de positividade por cálculo direto. O seguinte Teorema simplifica o problema de complexidade algébrica.

Teorema 6.1: A função de transferência $h(p)$ é estritamente positiva real (SPR) se e só se:

- (i) $h(p)$ é estritamente estável.
- (ii) A parte real de $h(p)$ é estritamente positiva ao longo do eixo imaginário $j\omega$, isto é, $\forall \omega \geq 0$ $\Re[h(j\omega)] > 0$. ■

6.1.1.1 Condições Necessárias para $h(p)$ ser Estritamente Positiva Real

1. A transferência $h(p)$ é estritamente estável.
2. O diagrama de Nyquist de $h(j\omega)$ fica inteiramente no semi-plano lateral direito, ou seja, a defasagem do sistema em resposta a uma entrada senoidal é sempre inferior a 90° .
3. A transferência $h(p)$ tem grau relativo 0 ou 1.
4. A transferência $h(p)$ é estritamente de fase mínima — isto é, todos os seus zeros estão estritamente no semi-plano lateral esquerdo.

6.1.1.2 Condições Suficientes para $h(p)$ ser Estritamente Positiva Real

1. As condições necessárias são satisfeitas.
2. Os zeros e os pólos são reais.
3. Os zeros e os pólos se entrelaçam de modo alternado no eixo real, isto é, ao longo do eixo real temos a configuração zero, pólo, zero, pólo, etc. — **entrelaçamento pólo-zero**.

Exemplo 6.2: Sejam as seguintes funções de transferência:

$$h_1(p) = \frac{p-1}{p^2+ap+b}: \text{ fase não mínima (zero em } +1) \rightarrow \text{ não é positiva real}$$

$$h_2(p) = \frac{p+1}{p^2-p+1}: \text{ não é Hurwitz!} \rightarrow \text{ não é estritamente positiva real}$$

$$h_3(p) = \frac{1}{p^2+ap+1}: \text{ grau relativo 2} \rightarrow \text{ não é estritamente positiva real}$$

$$h_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1} \text{ é estritamente positiva real}$$

Pelo teorema 6.1 tem-se $\Re[h_4(j\omega)] = \frac{1}{[1-\omega^2]^2+\omega^2} > 0$. ★

Observação 6.2: Positividade Real (PR) admite pólos no eixo imaginário \Im , enquanto Positividade Estritamente Real (SPR), não. ◆

Exemplo 6.3: A função de transferência $h(p) = \frac{1}{p}$ é positiva real mas não é estritamente positiva real ★

Teorema 6.2: A função de transferência $h(p)$ é positiva real (PR) se e só se:

- (i) A transferência $h(p)$ é estável.
- (ii) Os pólos de $h(p)$ sobre o eixo imaginário são simples — isto é, distintos — e os resíduos associados são reais e não-negativos.
- (iii) $\Re[h(j\omega)] \geq 0 \forall \omega \geq 0$ tal que $j\omega$ não é pólo de $h(p)$. ■

6.2 Lema de Kalman–Yakubovich

Este lema é muito importante e estabelece uma relação (nada intuitiva) simples entre a propriedade da Positividade Estritamente Real (SPR) e a realização em estados de $h(p)$.

Lema 6.1: (Lema de Kalman–Yakubovich) Considere um sistema linear invariante no tempo conforme (6.3).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Z}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (6.3)$$

A função de transferência $h(p) = \mathbf{c}^T [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}$ é estritamente positiva real (SPR) se, e só se, existirem matrizes positivas definidas \mathbf{P} e \mathbf{Q} tais que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (6.5)$$

■

Observação 6.3: Extensão para positividade real (PR) é simples, basta fazer a matriz \mathbf{Q} poder ser positiva semi-definida no lema 6.1. ◆

Observação 6.4: O lema 6.1 é conhecido também por **Lema da Positividade Real**. ◆

Observação 6.5: Todo sistema estritamente positivo real (SPR) dissipa energia. ◆

Um lema mais geral é o seguinte — que não exige controlabilidade — e que inclui $h(p)$ causal (não-estritamente), ou seja, a saída pode ser do tipo $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{\gamma}{2}$ com $\gamma \geq 0$.

Lema 6.2: (Lema de Kalman–Meyer–Yakubovich) Dado um escalar $\gamma \geq 0$, vetores \mathbf{b} e \mathbf{c} , uma matriz \mathbf{A} estável assintoticamente (AE), e uma matriz simétrica positiva definida \mathbf{L} .

$$H(p) = \frac{\gamma}{2} + \mathbf{c}^T (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (6.6)$$

Se a função de transferência (6.6) é estritamente positiva real (SPR), então existem $\epsilon > 0$, um vetor \mathbf{q} e uma matriz positiva definida \mathbf{P} tais que (6.7) e (6.8) verificam-se.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{q} \mathbf{q}^T - \epsilon \mathbf{L} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{q} \sqrt{\gamma} \quad (6.8)$$

■

Para o caso multivariável consultar [?] ou [?] página 131.

6.3 Passividade

A própria função de Lyapunov é relacionada à noção de energia e para sistemas estáveis, ela decresce com o tempo quando não reage sobre o sistema. O mesmo ocorre com um sistema dissipativo, que dissipando energia volta ao ponto de equilíbrio. Um sistema dissipativo é um tipo de sistema passivo.

A Teoria da passividade permite formalizar uma abordagem para construir funções de Lyapunov para sistemas de controle combinando funções de Lyapunov de seus subsistemas passivos interligados de alguma forma. A relação básica que exprime a lei da conservação de energia é

$$\frac{d}{dt} [\text{Energia Armazenada}] = [\text{Potência Externa de Entrada}] + [\text{Potência de Geração Interna}]$$

A potência de entrada pode ser representada pelo produto de uma entrada (“esforço” ou “fluxo”) u e da saída (“fluxo” ou “esforço”) y . Por exemplo, u é tensão e y é corrente.

No que segue vamos considerar sistemas que verificam equações da **forma de potência**

$$\dot{V}_1(t) = y_1^T u_1 - g_1(t) \quad (6.9)$$

Assim seja o sistema (6.9) onde V_1 e g_1 são funções do tempo, u_1 é a entrada do sistema, e y_1 é a sua saída.

6.3.1 Combinações de Blocos

Seja outro sistema satisfazendo (6.10).

$$\dot{V}_2(t) = y_2^T u_2 - g_2(t) \quad (6.10)$$

Vamos interconectá-lo com (6.9) através de uma configuração de realimentação obtendo (6.11).

$$\begin{cases} u_2 = y_1 \\ u_1 = -y_2 \end{cases} \quad (6.11)$$

Suponha que $V_1 + V_2$ tenha ($\forall t$) um limite inferior (por exemplo, positivo). Então temos que, se para todo t , $g_1 + g_2 \geq 0$, então $V = V_1 + V_2$ é superiormente limitada e $\int_0^\infty [g_1(t) + g_2(t)] dt < \infty$

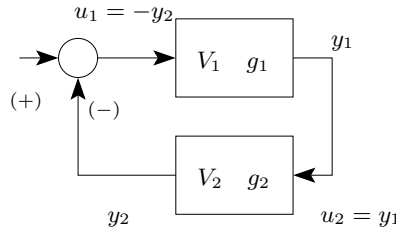


Figura 6.1. Dois blocos ligados por realimentação.

Se além disso $g_1(t)$ e $g_2(t)$ forem ambos não-negativos e uniformemente contínuos, então ambos tendem a zero com $t \rightarrow \infty$. Este último resultado é consequência do importante Lema de Barbalat que instrumenta a prova do Teorema de La Salle — veja prova em [?].

Observação 6.6: Uma condição suficiente para \dot{f} ser uniformemente contínua é que $|f|$ seja limitado $\forall t$. ◆

Lema 6.3: (Lema de Barbalat) *Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito quando t tende a infinito, isto é:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L < \infty$$

Além disso, se $\dot{f}(t)$ for uniformemente contínua, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$$

■

Observação 6.7: Uma função com derivada limitada é uniformemente contínua. ◆

Observação 6.8: De acordo com a figura 6.2, se a função f não é uniformemente contínua (note que \ddot{f} não é limitada) e no entanto tende a uma constante limitada. Sua derivada, entretanto, não tende a zero! ◆

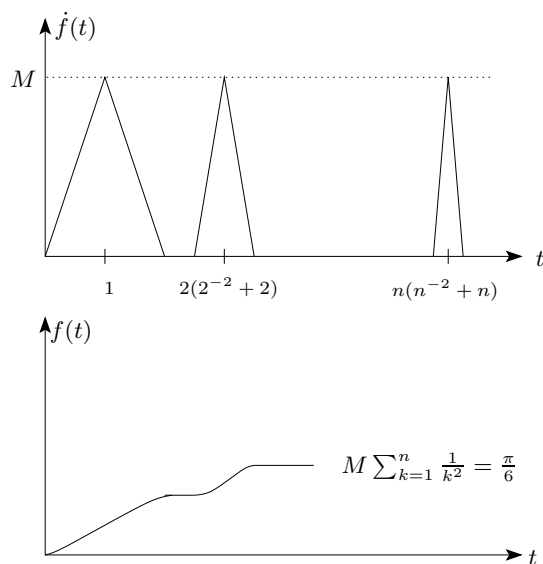


Figura 6.2. Exemplo de função que cresce ilimitadamente com derivada limitada.

Note que não necessitamos da expressão explícita de $V_1 + V_2$. Mas geralmente, sem nenhuma hipótese sobre o sinal de $V_1 + V_2$ ou $g_1(t) + g_2(t)$ podemos concluir que: Se $V_1 + V_2$ tem limite finito com t tendendo a infinito, e se $g_1(t) - g_2(t)$ é uniformemente contínua, então $g_1(t) + g_2(t)$ tende a zero quando t tende ao infinito, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) + g_2(t) = 0$$

Um sistema verificando (6.10) com V_1 limitado inferiormente e $g_1(t) \geq 0$ é dito SER PASSIVO — ou ser um MAPEAMENTO PASSIVO entre u_1 e y_1 . Além disso, um sistema passivo é dito ser dissipativo se:

$$\int_0^\infty y_1^T(t) u_1(t) dt \neq 0$$

então:

$$\int_0^\infty g_1(t) dt > 0$$

Exemplo 6.4: Sistema mola massa não-linear dado por $m\ddot{x} + x^2\dot{x}^3 + x^7 = F$.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}x^8\right)}_{V_1} = \underbrace{\dot{x}F}_{y_1 u_1} - \underbrace{x^2\dot{x}^4}_{-g_1}$$

De F para \dot{x} o sistema é passivo. Veja página 134 de [?].

★

6.3.2 Combinação Paralela ou Realimentada de Blocos

Combinações paralelas ou realimentadas de blocos na forma de potência (6.9) continuam na forma de potência:

$$y^T u = y_1^T u_1 + y_2^T u_2$$

- Combinação Paralela: $y^T u = (y_1 + y_2)^T u = y_1^T u + y_2^T u = y_1^T u_1 + y_2^T u_2$
- Combinação Realimentada: $y^T u = y_1^T (u_1 + y_2) = y_1^T u_1 + y_2^T y_2 = y_1^T u_1 + u_2^T y_2$

Para o sistema global temos $V = V_1 + V_2$ e $g = g_1 + g_2$. Por indução, qualquer combinação paralela ou realimentada dos blocos mantém a forma de potência, assim tem-se que: $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ e $g = g_1 + g_2 + \dots + g_n$. Este resultado é forte pois não se aplica apenas para sistemas lineares.

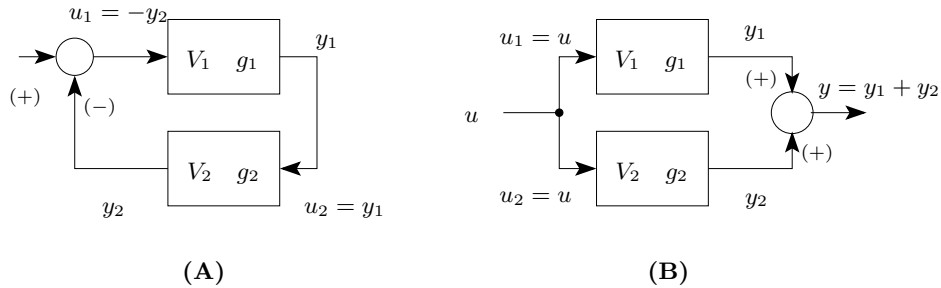


Figura 6.3. Configuração (A) realimentada e (B) paralela.

Exemplo 6.5: Um sistema adaptativo de uma planta de primeira ordem resulta nas seguintes equações:

$$\dot{e}(t) = -e(t) + \tilde{\theta} \omega(t)$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_*$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -e(t) \omega(t)$$

Onde $e(t)$ representa o erro de rastreamento e θ o parâmetro a ser ajustado, idealmente para o valor desconhecido θ_* . Quando $\theta = \theta_*$, temos que $e(t)$ tende exponencialmente a zero — $\omega(t)$ representa um sinal mensurável.

Temos o diagrama de blocos (equivalente) da figura 6.4.

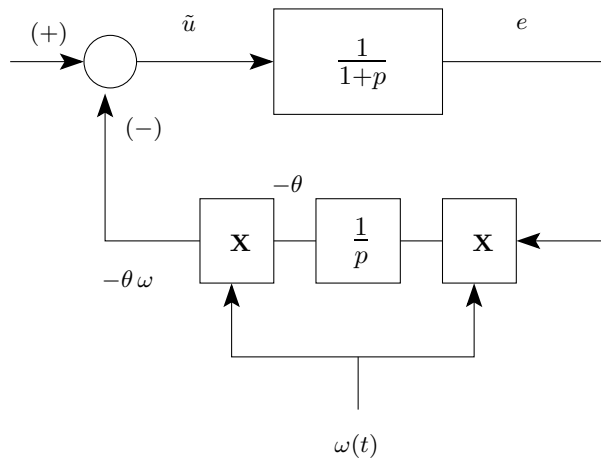


Figura 6.4. Configuração paralela e realimentação.

1. $\tilde{u} \rightarrow e(t)$ é passivo e dissipativo: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} e^2(t) = e(t) \dot{e}(t) = e(t) \tilde{u} - e^2(t)$;
2. $e(t) \rightarrow -\theta \omega(t)$ é passivo: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \theta^2 = (-\theta \omega(t)) e(t)$.

★

6.4 Positividade e Passividade de Sistemas Lineares

Seja o sistema linear (6.12) onde a matriz \mathbf{A} é estritamente estável (estritamente Hurwitz).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (6.12)$$

Então, sabemos que existe um par de matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} positiva definidas que atendem à função de Lyapunov $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$.

Vejam como se comporta a função candidata $V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ para o sistema (6.12).

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (6.13)$$

Como $y = \mathbf{C} \mathbf{x}$, vemos que (6.13) mostra que o mapeamento entre u e y é passivo desde que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ como no lema de Kalman–Yakubovich. Como consequência, tem-se:

1. Um sistema (6.1) com uma função de transferência estritamente positiva real (SPR) é passivo e dissipativo.
2. Se a função de transferência é positiva real (PR), é apenas passivo.

No exemplo de controle adaptativo visto acima, vemos que se tratava de um sistema linear estritamente positivo real (SPR) realimentado por um bloco não-linear passivo (mas não dissipativo). Essa combinação resulta em um sistema passivo e estável.

6.5 Estabilidade Absoluta

Consideremos um sistema linear realimentado por um bloco não-linear conforme a figura 6.5 cujas equações de estado e a função de transferência são respectivamente (6.14) e (6.15).

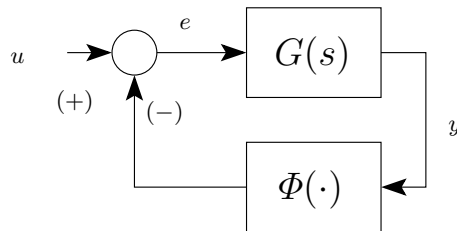


Figura 6.5. Sistema linear realimentado por sistema não-linear.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} u \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$G(p) = \mathbf{c}^T (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (6.15)$$

Se $\varphi(y) = \alpha y$, isto é, uma função linear, a análise de estabilidade seria simples (autovalores, Hurwitz, Nyquist, lugar das raízes). Poderíamos até considerar toda uma classe de funções lineares examinando o diagrama de Nyquist ou as condições de Routh-Hurwitz. Para a classe definida com $\alpha \in [k_1, k_2]$ o gráfico de φ estaria dentro do setor cônico da figura 6.6.

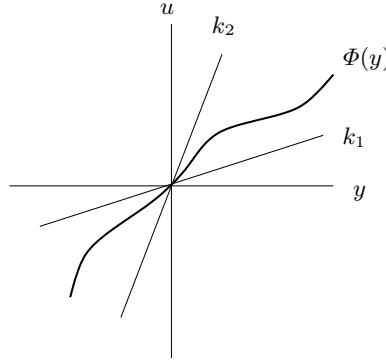


Figura 6.6. O setor $[k_1, k_2]$ de φ .

Obviamente, para essa classe temos $y \neq 0$, o que implica em $k_1 \leq \frac{\varphi(y)}{y} \leq k_2$.

Se agora deixarmos $\varphi(y)$ ser não-linear poderíamos ter algo como mostrado na figura 6.6. Por que considerar tais funções não-lineares contidas em um setor?

Na prática, um dispositivo físico, por exemplo um atuador, raramente tem uma característica bem conhecida, inclusive, tal característica pode variar de um atuador para outro. é importante assegurar que o sistema fique pelo menos estável dentro de uma faixa de incerteza do tal dispositivo. Uma maneira de formular a incerteza é através de uma condição do setor da figura 6.6. Quanto maior a incerteza, maior o intervalo $[k_1, k_2]$.

Conjectura 6.1: (Conjectura de Aizerman – 1949): Se o sistema for assintoticamente estável para toda característica linear no setor $[k_1, k_2]$ então é também globalmente assintoticamente estável (GAE) para toda característica não-linear no mesmo setor. ■

A conjectura de Aizerman é válida para sistemas de primeira ordem e quase sempre válida para sistemas de segunda ordem. Embora difícil de mostrar, a conjectura não vale para sistemas de ordem maior. A conjectura de Aizerman gerou uma rica teoria de estabilidade denominada “Estabilidade Absoluta”.

Definição 6.2: O sistema da figura 6.5, descrito pela equação (6.12), é absolutamente estável no setor $[k_1, k_2]$ se for globalmente assintoticamente estável (GAE) para **qualquer** não linearidade $\varphi \in [k_1, k_2]$. ▲

Observação 6.9: Setores abertos tais como $(k_1, k_2]$, (k_1, k_2) e $[k_1, k_2)$ também podem ser considerados. ◆

Exemplo 6.6: Considere $G(p) = \frac{1}{p}$. Então temos estabilidade absoluta no setor $(0, \infty)$. Não podemos considerar o setor $[0, \infty)$ (por que?). ★

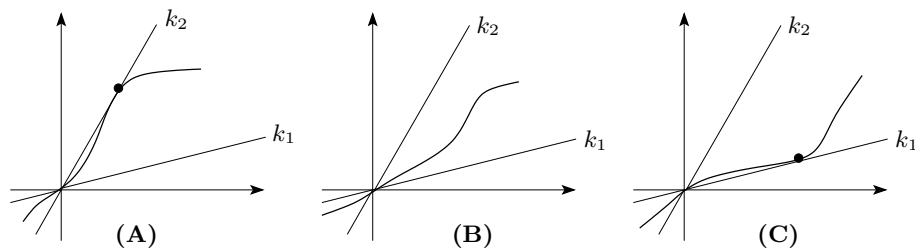


Figura 6.7. Exemplificação dos setores possíveis. (A) fechado à direita e aberto à esquerda, (B) ambos aberto e (C) fechado à esquerda e aberto à direita.

6.5.1 O critério de Popov

Os trabalhos de Lur'e sobre o problema de Estabilidade Absoluta foram seminais porém foi V.M. Popov que deu uma solução elegante conhecida por “Critério de Popov”.

Teorema 6.3: (Critério de Popov): *Se o sistema (6.1) satisfaz as seguintes condições:*

- A matriz \mathbf{A} é Hurwitz — isto é, $\Re[\lambda_i] < 0 \forall i$.
- O par $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ é controlável.
- $\varphi \in [0, k]$
- $\exists \alpha > 0$ tal que (6.16) verifica-se para um ϵ arbitrariamente pequeno.

$$\forall \omega \geq 0 : \Re[(1 + j\alpha\omega)G(j\omega)] + \frac{1}{k} \geq \epsilon \quad (6.16)$$

Então a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável (GAE). ■

A desigualdade (6.16) é a **desigualdade de Popov** e claramente é uma **condição de Positividade Real**. A prova pode ser feita usando-se uma função de Lyapunov candidata baseada no Lema de Kalman–Yakubovich.

Principais características do critério de Popov:

- Só se aplica para sistemas autônomos;
- é restrito a não-linearidades estáticas, sem memória e invariantes no tempo.
- A estabilidade absoluta pode ser determinada examinando a resposta em frequência de um subsistema linear, sem necessidade de uma função explícita de Lyapunov.

6.5.1.1 Interpretação Gráfica

Mediante manipulações simples, uma função de transferência $G(j\omega)$ pode ser escrita como (6.17).

$$G(j\omega) = G_1(\omega) + j G_2(\omega) \quad (6.17)$$

Da equação (6.16) — esta equação é o resultado do teorema 6.3 — obtem-se (6.18).

$$G_1(\omega) - \alpha \omega G_2(\omega) + \frac{1}{k} \geq \epsilon \quad (6.18)$$

Vamos definir uma **resposta em frequência modificada** da seguinte forma:

$$W(j\omega) = x + jy \triangleq G_1(\omega) + j\omega G_2(\omega)$$

Então (6.18) implica que é suficiente para estabilidade global assintótica que o diagrama de $W(j\omega)$ no plano de Nyquist esteja (uniformemente) abaixo da reta $x - \alpha y + \frac{1}{k} = 0$ conforme a figura 6.8.

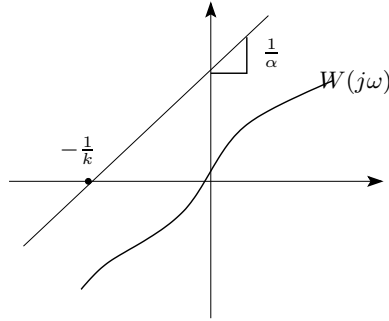


Figura 6.8. Critério gráfico de Popov

Exemplo 6.7: Aplicação do Critério de Popov

Seja a função de transferência dada por:

$$G(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 7p + 10}$$

com uma função φ pertencente ao intervalo fechado $\varphi \in [0, k]$.

As funções $G_1(\omega)$ e $G_2(\omega)$ referentes à equação (6.17) são dadas por:

$$G_1(\omega) = \frac{4\omega^2 + 30}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100}$$

$$G_2(\omega) = \frac{-\omega(\omega^2 + 11)}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100}$$

A desigualdade de Popov resulta em:

$$4\omega^2 + 30 + \alpha(\omega^2 + 11)\omega^2 + \left(\frac{1}{k} - \epsilon\right)(\omega^4 + 29\omega^2 + 100) > 0$$

que é satisfeita para $k \in (0, \infty)$, $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. ★

6.5.1.2 Função de Lyapunov associada ao Critério de Popov

A função de Lyapunov associada ao critério de Popov é uma função do tipo Lur'e dada por:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \beta \int_0^y \varphi(\sigma) d\sigma$$

6.5.2 Critério do Círculo

Outro critério de estabilidade absoluta derivado a partir de uma simples função de Lyapunov quadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ é o critério do círculo que é uma generalização direta do critério de Nyquist para sistemas não-lineares. Considere-se o disco $D(k_1, k_2)$ conforme mostrado na figura 6.9.

Teorema 6.4: (Critério do Círculo): Se o sistema 6.12 satisfaz as seguintes condições:

- A matriz \mathbf{A} não possui autovalores no eixo imaginário, e tem ρ autovalores estritamente no semi-plano direito.
- A não-linearidade φ pertence ao setor $[k_1, k_2]$
- Uma das seguintes condições é verdadeira:
 1. $0 < k_1 \leq k_2$: O diagrama de Nyquist $G(j\omega)$ não entra no disco $D(k_1, k_2)$ e o circunda ρ vezes no sentido anti-horário.
 2. $0 = k_1 < k_2$, $\rho = 0$ e $G(j\omega)$ permanece no semi-plano $\Re p > -\frac{1}{k_2}$.
 3. $k_1 < 0 < k_2$, $\rho = 0$ e $G(j\omega)$ fica no interior do disco $D(k_1, k_2)$.
 4. $k_1 < k_2 < 0$, $-G(j\omega)$ não entra no disco $D(-k_1, -k_2)$ e o circunda ρ vezes no sentido anti-horário.

Então o equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável (GAE). ■

Note que o disco $D(k_1, k_2)$, faz o papel do ponto crítico $-\frac{1}{k}$ ao qual se reduz quando $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k$, isto é, quando a incerteza não existe.

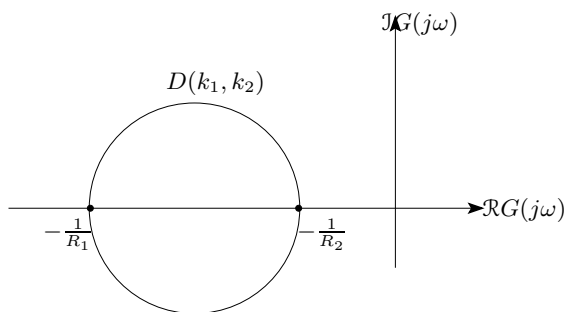


Figura 6.9. Critério do Círculo.

Observação 6.10: Como consequência da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ não depender da não-linearidade, o critério do círculo vale para φ variante no tempo, isto é:

$$k_1 \leq \frac{\varphi(t, y)}{y} \leq k_2 \quad (y \neq 0)$$

◆

Assim o critério do círculo é mais conservativo do que o de Popov — compare no caso $0 = k_1 < k_2$ em que a reta de Popov pode ser inclinada e a do Teorema 6.4 deve ser vertical.

7

Projeto de Sistemas de Não-Lineares de Controle

7.1 Problemas de Controle Não-Lineares

Quando a tarefa de controle envolve grande rapidez e amplitude de movimentos, os efeitos não-lineares tornam-se significativos e o controle não-linear pode tornar-se necessário para chegar às especificações de desempenho desejadas.

Duas categorias gerais de problemas de controle são a **estabilização** (*regulação*) e o **rastreamento** (*servo*).

No problema da estabilização, um estabilizador (ou regulador) deve ser projetado de modo que o estado do sistema em malha fechada seja estabilizado em torno de um ponto de equilíbrio (ou ponto de operação). Por exemplo, temos o controle de atitudes de satélites, controle de atitude de uma aeronave e da posição de um robô manipulador.

No problema de rastreamento, o objetivo de controle é construir um controlador chamado “rastreador”, de modo que a saída do sistema rastreie uma trajetória variante no tempo, por exemplo, fazendo com que uma aeronave vôle ao longo de uma trajetória especificada ou fazendo com que um robô desenhe linhas retas ou circulares.

A seguir, discutiremos mais detalhadamente cada um dos dois problemas.

7.2 Problema de Estabilização Assintótica

Seja um sistema não-linear dado pela equação (7.1), encontre uma lei de controle \mathbf{u} , tal que, começando de qualquer ponto em um domínio Ω , o estado \mathbf{x} tende a $\mathbf{0}$ com t tendendo a infinito conforme (7.2).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (7.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

As leis de controle podem ser de dois tipos:

- Lei de Controle Estática: O sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ depende diretamente de $\mathbf{x}(t)$ (vetor de estados).

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Lei de Controle Dinâmica: O sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ depende do vetor $\mathbf{x}(t)$ e de variáveis que dependem dinamicamente de $\mathbf{x}(t)$ (por exemplo, usando observadores).

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

A abordagem não-linear faz sentido quando Ω é grande. Caso contrário, a abordagem linear é suficiente em muitos casos.

Observação 7.1: Basta considerar a estabilização da origem, uma vez que podemos sempre redefinir as coordenadas do sistema para que a origem esteja no ponto de equilíbrio \mathbf{x}_d desejado. ♦

7.3 Rastreamento por Estabilização

Normalmente o rastreamento é mais difícil de resolver do que a estabilização. De fato, considere o seguinte sistema invariante no tempo:

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Desejamos rastrear \mathbf{y}_d , isto é, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \rightarrow \mathbf{0}$.

Reescrevendo o sistema em termos do erro de rastreamento, tem-se a equação (7.3) que é um sistema variante no tempo.

$$\ddot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{e}}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}_d(t), \dot{\mathbf{y}}_d(t), \ddot{\mathbf{y}}_d(t)) = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

Trata-se agora de estabilizar um sistema variante no tempo.

7.4 Características Desejáveis de um Sistema de Controle

- **Estabilidade:** Deve ser garantida para o modelo nominal — aquele usado para projeto.
- **Acurácia e rapidez de resposta:** Pelo menos para algum movimento típico na região de operação.
- **Robustez:** O sistema deve ser pouco sensível a efeitos não considerados no projeto, tais como, distúrbios, ruído de medição, dinâmica não-modelada (parasitas).
- **Custo razoável:** O custo é determinado sobretudo pelo número e tipo de atuadores, sensores e computadores para impelmentá-lo.

7.5 Linearização por Realimentação

Um método tradicional (e natural!), de se usar a idéia da linearização decorre do fato de que, na realidade, todo sistema físico é não-linear, simplesmente que a linearidade é uma idealização matemática. Nem por isso a abordagem linear deixa de ser válida. Ao contrário, resolve a maioria dos problemas de controle encontrados na prática. Essa questão está bem formalizada no capítulo 12 de [?] onde se mostra que um projeto de controlador feito através de um modelo nominal linear do sistema — obtido por série de Taylor até a primeira ordem, em torno do ponto de operação de interesse — funciona bem no sentido local, isto é, desde que o sistema permaneça em torno do ponto de operação onde foi linearizado. Trata-se aqui de uma abordagem diferente daquela em que se considera uma linearização do modelo não-linear como uma boa aproximação do sistema.

Aqui a linearização será feita modificando-se o sistema através de realimentação e transformando o vetor de estado para um novo vetor de estado de modo que, nas novas coordenadas, o sistema seja perfeitamente linear.

7.6 Uma Forma Canônica para Sistemas Não-Lineares

Exemplo 7.1: Controle de nível em um tanque: Seja o tanque mostrado na figura 7.1. Sua dinâmica de nível do líquido é dada pela equação (7.4), onde A é a área da seção transversal do tanque e a é a área da seção transversal do tubo de saída e u é o fluxo de entrada.

$$A \dot{h} = u - a\sqrt{2gh} \quad (7.4)$$

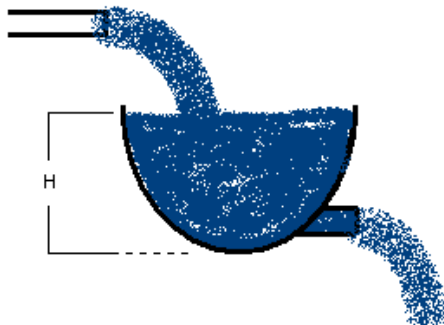


Figura 7.1. Características do tanque do exemplo 7.1: Entrada, altura e fluxo de saída.

Vamos definir uma nova variável de controle como em (7.5), onde ν é a nova variável de controle.

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h)\nu \tag{7.5}$$

Temos como resultado a equação (7.6), que é um sistema linear.

$$\dot{h} = \nu \tag{7.6}$$

Escolhendo o novo controle como sendo (7.7), obtém-se a equação (7.8), o que implica em $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(t) = 0$.

$$\nu = -\alpha \tilde{h} \tag{7.7}$$

$$\dot{h} + \alpha \tilde{h} = 0 \tag{7.8}$$

A lei de controle de vazão é portanto:

$$u = a\sqrt{2gh} - A(h)\alpha \tilde{h}$$

O primeiro termo corresponde ao valor que mantém a vazão de saída desejada e o segundo termo é um termo de realimentação “estabilizante”. Note que se $h_d(t)$ fosse variante no tempo, o problema de rastreamento seria resolvido redefinindo a equação (7.7) por:

$$\nu = \dot{h}_d(t) - \alpha \tilde{h} \tag{7.9}$$

o que modificaria a equação (7.8) para:

$$\dot{\tilde{h}} + \alpha \tilde{h} = 0$$

Para $h_d = cte$, temos $\dot{\tilde{h}} = \dot{h}$. ★

A idéia da linearização por realimentação, pela qual se procura cancelar as não-linearidades e impor uma dinâmica linear desejada, pode ser aplicada de maneira simples a uma classe de sistemas descrita na forma canônica de controlabilidade conforme (7.10), onde \mathbf{x} é o vetor de estado definido por (7.11).

$$\dot{\mathbf{x}}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \tag{7.10}$$

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

A forma é especial pelo fato de que embora as derivadas de \mathbf{x} apareçam na equação, as derivadas de u não aparecem.

No espaço de estado o sistema é representado por (7.12).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Para tal sistema podemos facilmente cancelar as não-linearidades através de:

$$u = \frac{1}{b}(\nu - f)$$

o que leva a um sistema linear que corresponde a n integradores em cascata, isto é, $x^{(n)} = \nu$.

Através da lei de controle — Realimentação de estados.

$$\begin{aligned} \nu &= -k_0 x_1 - k_1 x_2 - \dots - k_{n-1} x_n \\ &= -k_0 x - k_1 \dot{x} - \dots - k_{n-1} x^{(n-1)} \end{aligned}$$

Para resolver o problema de rastreamento, basta utilizar:

$$\nu = -x_d^{(n)} - k_0 e - k_1 \dot{e} - \dots - k_{n-1} e^{(n-1)}$$

onde $e(t) \triangleq x(t) - x_d(t)$ é o erro de rastreamento.

Considerando o robô ilustrado na figura 7.2, desejamos obter um controlador para rastrear ângulos de juntas desejados ($q_{d1}(t), q_{d2}(t)$), obtidos através do planejador de trajetórias para, por exemplo, fazer com que o efetuador (ou ferramenta) descreva círculos. As equações dinâmicas do robô são obtidas através do seu Lagrangiano e têm a forma (7.13) onde cada termo é dado por (7.14), sendo $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ o vetor de ângulos das juntas e $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$ o vetor de torques em cada junta.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h \dot{q}_2 & -h \dot{q}_1 - h \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} H_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2 \\ H_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ H_{12} = H_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ h &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Em forma compacta tem-se a equação (7.15), onde \mathbf{H} é a matriz — simétrica e positiva definida — de inércia, $\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}$ corresponde às forças de Coriolis e centrípetas, e \mathbf{g} corresponde às forças da gravidade.

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau \quad (7.15)$$

Escolhendo uma representação adequada para a matriz \mathbf{C} , concluímos pela lei de conservabilidade (desprezamos os atritos nas juntas) que garante que **a matriz $\dot{\mathbf{H}} + 2\mathbf{C}$ é antisimétrica.**

Portanto $\forall \mathbf{q}$, tem-se:

$$\mathbf{q}^T (\dot{\mathbf{H}} + 2\mathbf{C})\mathbf{q} \equiv 0$$

A propriedade de antissimetria de $\dot{\mathbf{H}} + 2\mathbf{C}$ é extremamente importante na síntese de controladores para os robôs manipuladores. Aqui entretanto ela não será utilizada.

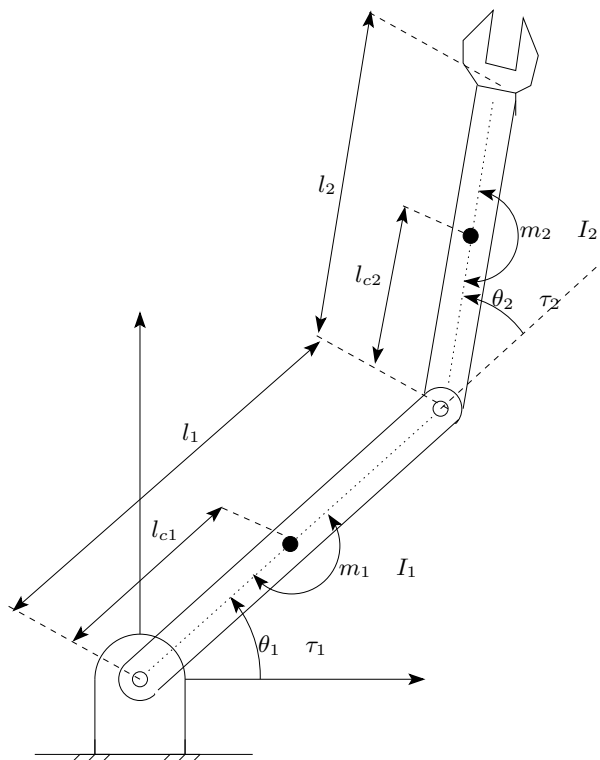


Figura 7.2. Um robô manipulador com dois graus de liberdade.

Como a matriz \mathbf{H}^{-1} sempre existe, a equação (7.15) é escrita como:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\tau}$$

A diferença com a equação (7.10) é que \mathbf{q} agora é um vetor. Entretanto as idéias apresentadas para (7.10) se aplicam com facilidade neste caso também:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{H} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}$$

E o sistema linearizado é dado por:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\nu}$$

Para realizar o rastreamento de $\mathbf{q}_d(t)$ basta escolhermos $\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, onde $\tilde{\mathbf{q}}$ é o vetor de erro de rastreamento para termos uma equação do erro dada por (7.16).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \ddot{\mathbf{q}}_d - 2\lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \lambda^2\tilde{\mathbf{q}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2\lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \lambda^2\tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7.16}$$

A equação característica de (7.16) tem pólos em $-\lambda < 0$; logo $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ converge exponencialmente para zero, conforme desejado.

Quando o sistema não está na forma canônica de controlabilidade, podemos usar **transformações de coordenadas**, como se faz para sistemas lineares, só que agora as transformações podem ser não-lineares, para obter a forma canônica.

Podemos ainda optar por uma **linearização parcial**, ao invés de uma linearização relativa a todo espaço de estado. é o caso de linearização “Entrada–Saída” pela qual apenas a relação entrada–saída fica linear, restando “internamente” ao sistema, dinâmicas possivelmente não-lineares.

7.7 Linearização Entrada–Saída

Seja um sistema não-linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. A linearização de que tratamos aqui busca transformar o sistema original não-linear em um sistema linear através de:

- (1) Transformação não-linear de estados: $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$
- (2) Transformação de entrada: $u = u(\mathbf{x}, \nu)$, onde ν é a nova entrada do sistema

O sistema transformado fica na forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{b} \nu$$

Exemplo 7.2: Seja o sistema não-linear dado por (7.17).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin(x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos(x_1) + u \cos(x_1) \end{cases} \quad (7.17)$$

Realizando o mapeamento $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ definido por (7.18).

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = ax_2 + \sin(x_1) \end{cases} \quad (7.18)$$

Obtem-se o sistema não-linear em \mathbf{z} dado por (7.19).

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -2z_1 \cos(z_1) + \cos(z_1) \sin(z_1) + au \cos(2z_1) \end{cases} \quad (7.19)$$

Fazemos:

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (\nu - \cos(z_1) \sin(z_1) + 2z_1 \cos(z_1))$$

Obtém-se o sistema linearizado (7.20) que é controlável.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \nu \end{cases} \quad (7.20)$$

Os pólos podem portanto ser escolhidos livremente.

Por exemplo, com um controle do tipo $\nu = -2z_2$ há dois pólos em -2 .

Em termos das variáveis originais, tem-se a lei de controle u dada por (7.21).

$$u = \frac{1}{\cos(2x_1)} (-2ax_2 - 2\sin(x_1) - \cos(x_1) \sin(x_1) + 2x_1 \cos(x_1)) \quad (7.21)$$

O vetor de estados original \mathbf{x} , dado em termos de \mathbf{z} é (7.22).

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = \frac{z_2 - \sin(z_1)}{a} \end{cases} \quad (7.22)$$

Como z_1 e z_2 convergem a zero, também o sistema original converge a zero.

O diagrama de blocos do sistema realimentado é mostrado na figura 7.3. ★

Observação 7.2: O resultado é local. A lei de controle só é bem definida fora dos pontos que atendam a $x_1 = (\frac{\pi}{4} \pm \frac{k\pi}{2})$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. ◆

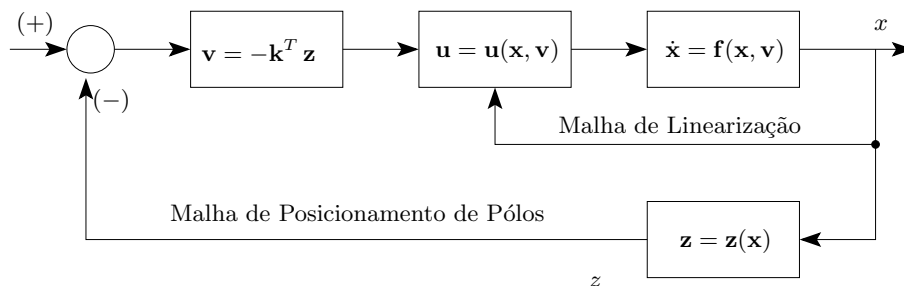


Figura 7.3. Linearização entrada-saída.

7.8 Controle Adaptativo

Na prática dificilmente tem-se um modelo matemático preciso da planta a ser controlada. Além disso, ao longo do tempo de operação os parâmetros da planta podem variar e distúrbios exógenos podem ocorrer, o que dificulta ainda mais o problema de projetar um controlador que garanta um bom desempenho do sistema em malha fechada mesmo com incertezas, variações paramétricas com o tempo e perturbações externas.

Uma resposta ao problema de controle de sistemas incertos é o **controle adaptativo** que geralmente é adequado para sistemas incertos invariantes ou lentamente variantes no tempo. Por exemplo, um robô manipulador carregando grandes cargas variáveis e de parâmetros inerciais incertos, sistemas de potência podem também ser sujeitos a grandes variações de carga (hora de pico na demanda de energia elétrica). Um exemplo clássico de aplicação de controle adaptativo é o controle de aeronaves, por exemplo, aviões anti-incêndio que carregam e descarregam grandes volumes de água. Outros exemplos são encontrados na literatura de controle de processos.

A idéia básica do controle adaptativo é a de estimar parâmetros incertos da planta, ou diretamente os parâmetros do controlador adequados, em tempo real, baseado nos sinais medidos do sistema, e usar esses parâmetros para calcular o sinal de controle. Um sistema de controle adaptativo pode assim ser considerado como um sistema de controle com estimação paramétrica em tempo real. A pesquisa em controle adaptativo passou por uma fase difícil pois a tentativa de aplicar esta abordagem para projetar pilotos automáticos para aeronaves de alto desempenho levou à queda de um avião de teste nos anos 50. A motivação para usar adaptação vem do fato de que tais aeronaves operam em ampla gama de velocidades e altitudes e portanto sofrem grandes variações paramétricas. Um ajuste automático foi então proposto para fazer face a tais variações dinâmicas da aeronave. Na época não se tinha uma base teórica sólida e o interesse pelo assunto só veio a ser reativado uma década mais tarde graças ao desenvolvimento de uma teoria mais coerente e matematicamente justificada que utiliza várias ferramentas da teoria de controle não linear, sobretudo aquelas ligadas à teoria de estabilidade de Lyapunov e ao conceito de passividade e positividade de sistemas dinâmicos.

O progresso teórico, juntamente com a facilidade de implementação usando microprocessadores levou a inúmeras aplicações práticas em áreas diversas, incluindo robótica, controle de mísseis e aeronaves, processos químicos, sistemas de potência, eletrônica de potência, controle de navios e bioengenharia.

7.8.1 Estruturas de Controle Adaptativo

Vamos apresentar a seguir duas estruturas básicas de controle adaptativo. O contexto adotado aqui, bem como na maior parte da literatura existente, é a de considerar que a planta é incerta com parâmetros constantes.

7.8.2 Controle Adaptativo por Modelo de Referência

O diagrama de blocos de um sistema de Controle Adaptativo por Modelo de Referência—CAMR ou MRAC — do inglês, **Model Reference Adaptive Control** — MRAC está mostrado na figura 7.4 onde distinguimos quatro blocos básicos: a **planta** com parâmetros desconhecidos ou incertos (isto é, dentro de uma faixa conhecida em torno de valores nominais), o **modelo de referência** que especifica a resposta desejada do sistema a uma entrada de referência $r(t)$, por exemplo, um degrau, o **controlador** que poderia ser um controlador PID, cujos ganhos ou parâmetros \hat{a} são ajustados através de uma **lei de adaptação** que gera uma estimativa para \hat{a} , procurando fazer com que a planta rastree o modelo de referência, isto é, que $e(t)$ tenda a zero para **qualquer** $r(t)$. Os sinais *p.m.* da figura 7.4 representam perturbações mensuráveis ou outros sinais gerados por sinais mensuráveis através de filtros adequados.

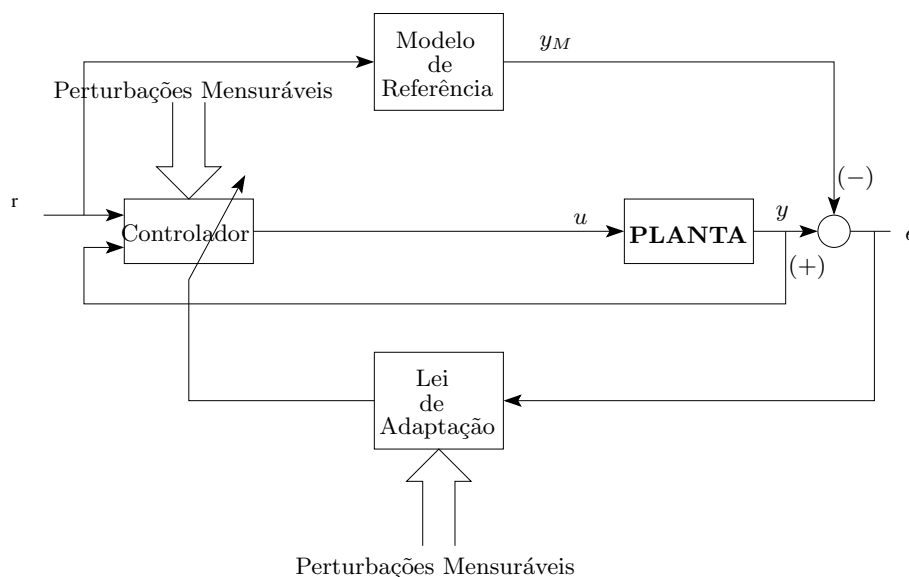


Figura 7.4. Um sistema de controle adaptativo por modelo de referência (MRAC).

O controlador deve ser escolhido tal que, para $\hat{a} = a^*$ — parâmetros de casamento (*matching*) — entre modelo e planta. A planta realimentada apresenta a mesma resposta a $r(t)$ que o modelo.

Veremos mais adiante outra técnica para controle de sistemas incertos chamada de Controle Robusto, em particular o **Controle por Modos Deslizantes** (CMD). A vantagem do Controle Robusto é permitir tratar de sistemas com variações rápidas de parâmetros. Apesar de apresentar dificuldades muito criticadas na literatura por ser baseada em alto ganho e levar ao problema de oscilações de alta frequência no sinal de controle, o Controle Robusto e o CMD têm também sido aplicados na prática com sucesso e o interesse por estas técnicas vem crescendo.

Vejamos um exemplo de sistema de controle adaptativo:

Exemplo 7.3: MRAC para uma massa desconhecida. Considere o controle de uma massa sobre uma superfície sem atrito submetida a uma força u , sendo portanto regida por (7.23).

$$m \ddot{x} = u \tag{7.23}$$

Suponhamos que um operador humano realize um comando de posição $r(t)$ para o sistema de controle — possivelmente através de um joystick — suposto uniformemente limitado. Tal situação ocorre ao operar um robô submarino (ROV) a baixa velocidade quando o arraste é desprezível. Uma maneira razoável de especificar o comportamento desejado é através do modelo de referência de segunda ordem.

$$\ddot{x}_m + \lambda_1 \dot{x}_m + \lambda_2 x_m = \lambda_2 r(t)$$

Ou seja:

$$x_m = \frac{\lambda_2}{p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2} r(t)$$

Repare que o ganho DC do modelo de referência é unitário, isto é, para um degrau de amplitude A , ocorre $\lim_{t \rightarrow \infty} x_m = A$. Os parâmetros λ_1 e λ_2 especificam o amortecimento e a rigidez da resposta do modelo.

Para uma resposta criticamente amortecida tomamos $\lambda_1 = 2\lambda$ e $\lambda_2 = \lambda^2$ para algum $\lambda > 0$.

Para fazermos x seguir x_m , supondo m conhecido, é simples. Basta usar (7.24) com $\tilde{x} = x - x_m$ sendo o erro de rastreamento.

$$u = m (\ddot{\tilde{x}}_m - 2\lambda \dot{\tilde{x}} - \lambda^2 \tilde{x}) \quad (7.24)$$

Assim, fica fácil verificar que este erro de rastreamento é regido por:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\lambda \dot{\tilde{x}} + \lambda^2 \tilde{x} = 0$$

Portanto, \tilde{x} tende exponencialmente a zero.

Agora vejamos quando m não é conhecido exatamente. Neste caso é razoável usar um controle na forma (7.25).

$$u = \hat{m} (\ddot{\tilde{x}}_m - 2\lambda \dot{\tilde{x}} - \lambda^2 \tilde{x}) \quad (7.25)$$

Isto é, substituir m de (7.24) por um valor estimado \hat{m} . Substituindo (7.25) em (7.23) obtemos (7.26) onde s é dado por uma lei proporcional-derivativa (PD) conforme (7.27).

$$m\dot{s} + \lambda m s = \hat{m}\nu \quad (7.26)$$

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad \text{ou} \quad s = (p + \lambda)\tilde{x} \quad (7.27)$$

$$\nu = (\ddot{\tilde{x}}_m - \lambda \dot{\tilde{x}} - \lambda^2 \tilde{x})$$

$$\hat{m} = \hat{m} - m$$

★

7.8.3 Lei de Adaptação

Esta é a questão que não estava bem esclarecida no início da década de 50 quando se usava uma lei não justificada teoricamente baseada em argumentos de otimização — minimizar o erro de rastreamento — denominada “regra do MIT” [?].

Será adotada aqui a lei (7.28), cuja origem será explicada mais adiante:

$$\dot{\hat{m}} = -\gamma \nu s \quad (7.28)$$

γ é um parâmetro, denominado ganho de adaptação. Vê-se imediatamente que (7.26) e (7.28) é um sistema não-linear pois $\hat{m}\nu$ em (7.26) envolve produto de variáveis de estado, assim como νs

(7.28). Ainda assim podemos demonstrar que esse sistema tem todos os sinais limitados — note que isso não é um resultado trivial, uma vez que não-linearidades quadráticas podem levar até ao escape em tempo finito! Podemos também demonstrar que $s(t)$ tende a zero e conseqüentemente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$$

Com efeito, definindo a função candidata não negativa do tipo Lyapunov⁴.

$$V = \frac{1}{2} (ms^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{m}^2)$$

Verifica-se que a derivada \dot{V} é dada por:

$$\dot{V} = -\lambda ms^2$$

Como $\dot{V} \leq 0$ então V é limitada $\forall t$ e também $s(t)$ e $\tilde{m}(t)$ (ou $\hat{m}(t)$).

Como $\tilde{x} = \frac{1}{p+\lambda} s$, \tilde{x} pode ser visto como a saída de um filtro estável com entrada s . Sendo $s(t)$ limitada $\forall t$, pela estabilidade BIBO, tem-se que $\tilde{x}(t)$ também o é. Em virtude de (7.27), $\dot{\tilde{x}}(t)$ também é uniformemente limitado. Assim todos os sinais do sistema são limitados. Notando que $V > 0$, $\dot{V} \leq 0$ e que $\dot{V} = -2\lambda ms\dot{s}$ também é uniformemente limitada, então \dot{V} é uniformemente contínua e, pelo Lema de Barbalat, conclui-se: Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$, conclui que $s(t)$ e $\tilde{x}(t)$ tendem a zero!

O exemplo 7.3 contém a essência das técnicas desenvolvidas nas décadas de 70 e 80 para se obter leis de adaptação com provas rigorosas de estabilidade e convergência de algoritmos adaptativos. Sistemas de ordem maior e mesmo sistemas não-lineares incertos puderam ser incluídos nessa nova teoria.

As figuras 7.5 e 7.6 mostram resultados da simulação para o exemplo da massa incerta. Note que na figura 7.5 o parâmetro não converge embora o erro (e também $s(t)$) convirja a zero como deveria ser.

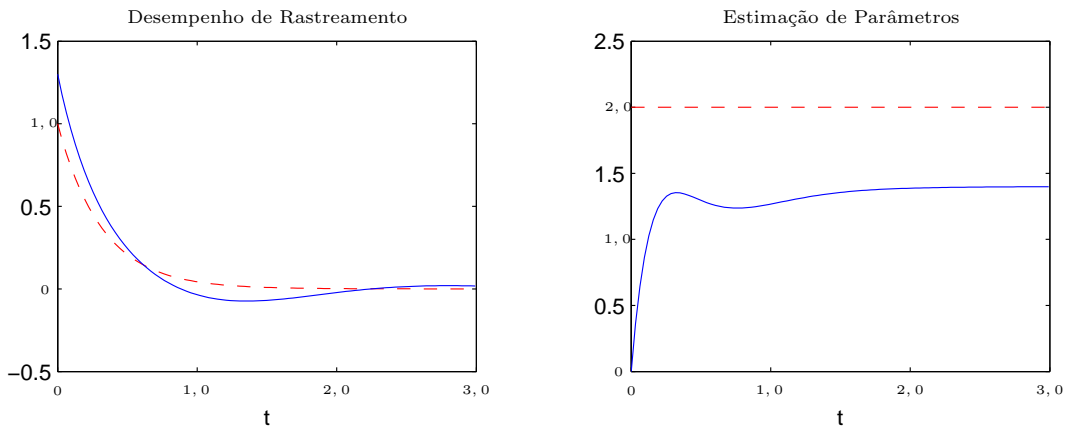


Figura 7.5. Desempenho da lei de controle adaptativo aplicada a uma massa $m = 2$ suposta desconhecida; $r(t) = 1$.

⁴ Não é função de Lyapunov por não envolver todos os estados do sistema sendo apenas positiva semi-definida em (x, \dot{x}, m) .

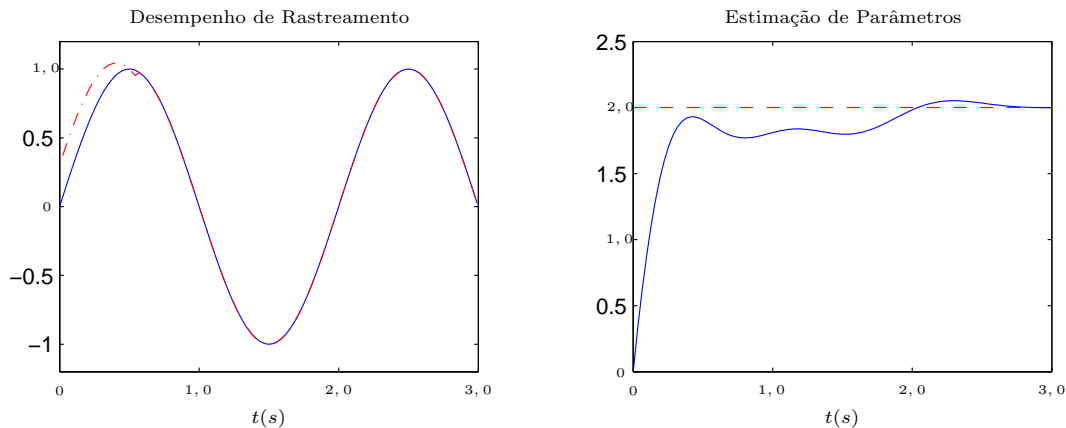


Figura 7.6. Desempenho da lei de controle adaptativo aplicada a uma massa $m = 2$ suposta desconhecida; $r(t) = \sin(4t)$.

Na figura 7.6 o parâmetro converge ao valor correto. A diferença dos resultados da figura 7.5 e figura 7.6 reside no fato de que o sinal de excitação no primeiro caso não é “rico” o suficiente para identificar o parâmetro desconhecido. Já uma senoide mostra-se “rica” o suficiente para identificá-lo. A noção de riqueza de sinal está ligada à persistência de excitação na literatura — veja [?].

7.8.4 Controladores Auto-Ajustáveis

A idéia de controladores auto-ajustáveis — CAA ou STC, do inglês, **Self Tuning Controllers** — nasceu da combinação dos seguintes componentes:

- Uma lei de controle baseada em parâmetros conhecidos — por exemplo, controle por mínimo de variância, por alocação de pólos, etc.
- **algoritmo de identificação recursiva** para aplicação do Princípio da Equivalência Certa em tempo real.

O problema foi originalmente formulado para sistemas discretos no tempo.

A figura 7.7 ilustra a estrutura de sistema com STC. A cada instante (de amostragem) o estimador de parâmetros envia ao controlador um conjunto de parâmetros estimados \hat{a} a partir dos dados já medidos de u (entrada) e de y (saída). O computador determina os parâmetros do controlador correspondentes à estimativa corrente, como se fosse uma estimativa exata. Esta idéia denomina-se Princípio da Equivalência Certa.

Cabe observar que a estrutura do STC é mais geral que a do MRAC. Existe mais flexibilidade no STC pois podem-se escolher diversos controladores — PID, LQR, MV ou H_∞ — combinados com diversos estimadores — mínimos quadrados, máxima verossemelhança, etc. O MRAC não pode ser diretamente utilizado para plantas de fase não-mínima pois o controlador essencialmente necessita inverter a planta — isto é, contém a inversa da função de transferência da planta — que seria **instável**. O STC evitaria isso através de um controlador por alocação de pólos que não necessita de tal inversão. Apesar de ter sido desenvolvido para sistemas discretos no tempo, o STC pode ser formulado para sistemas contínuos no tempo que são mais simples de analisar.

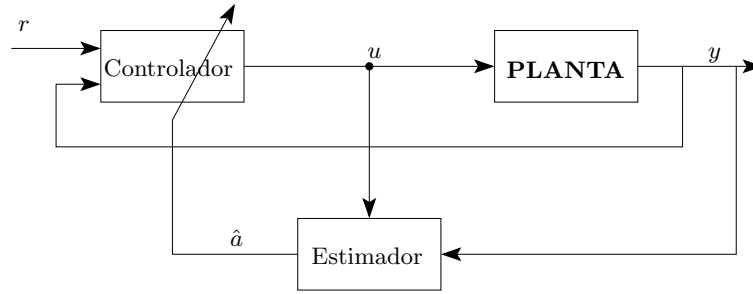


Figura 7.7. Um controlador auto-ajustável.

Fala-se em **adaptação direta** quando os parâmetros do controlador são estimados **diretamente** em tempo real. Em contrapartida, fala-se em **adaptação indireta** quando os parâmetros do controlador são estimados **indiretamente** através da estimação dos parâmetros da planta.

Exemplo 7.4: STC de uma massa desconhecida. Considere-se novamente o sistema da massa incerta (7.23) do exemplo 7.3. Se pudéssemos medir a aceleração \ddot{x} poderíamos estimar a massa através de (7.29).

$$\hat{m} = \frac{u(t)}{\ddot{x}} \quad (7.29)$$

Entretanto, a medida da aceleração é sabidamente ruidosa e além disso pode estar perto de zero. Uma maneira mais adequada é usar o método dos mínimos quadrados que consiste em estimar \hat{m} de modo que a integral do erro de predição quadrático, conforme (7.30), seja minimizada, onde o erro de predição é definido por (7.31).

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t e_f^2(\tau) d\tau \quad (7.30)$$

$$e_f \triangleq \hat{m}(t)\ddot{x}_f(t) - u_f(t) \quad (7.31)$$

Os termos $\ddot{x}_f(t)$ e $u_f(t)$ são dados, respectivamente, por (7.32) e (7.33).

$$\ddot{x}_f(t) = \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} x \quad (7.32)$$

$$u_f(t) = \frac{1}{(p+\alpha)^2} u \quad \alpha > 0 \quad (7.33)$$

Sendo os filtros $\frac{p^2}{(p+\alpha)^2}$ e $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$ causais e estáveis. Observe que se $\hat{m} = m$ o erro tende a zero exponencialmente — devido às condições iniciais dos filtros em (7.32) e (7.33). Então é legítimo definir e_f como erro de predição. Como J é uma função convexa com respeito a \hat{m} para cada instante t , seu mínimo satisfaz⁵ (7.34) para qualquer instante t , assim obtém-se a equação (7.35).

$$\nabla J(\hat{m}) = - \int_0^t e_f(\tau) u_f(\tau) d\tau + \hat{m}(t) \int_0^t u_f^2(\tau) d\tau = 0 \quad (7.34)$$

$$\hat{m}(t) = \frac{\int_0^t e_f u_f d\tau}{\int_0^t u_f^2 d\tau} \quad (7.35)$$

É possível mostrar que, mesmo em presença de ruído de média nula, ocorre (7.36).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{m}(t) = m \quad (7.36)$$

★

⁵ Veja referência [?] na página 192.

A equação (7.35) não permite implementação em tempo real. Uma fórmula diferencial pode ser utilizada para estimação em tempo real; basta definir P como sendo (7.37), onde sua derivada é dada por (7.38).

$$P^{-1} \triangleq \int_0^t w^2(\tau) d\tau \quad (7.37)$$

$$\frac{dP^{-1}}{dt} = w^2(t) \quad (7.38)$$

O que permite chegar à equação (7.39) implementável em tempo real.

$$\frac{d\hat{m}}{dt} = -P w(t) e_f(t) \quad (7.39)$$

7.8.5 Relações entre o MRAC e o STC

O controle por MRAC e o controle por STC foram desenvolvidos sob perspectivas diferentes. O MRAC têm por objetivo minimizar por adaptação paramétrica o erro de rastreamento entre a planta e um modelo de referência (erro de saída). Já o STC tenta estimar os parâmetros da planta através de métodos recursivos de estimação paramétrica e através destes calcular uma lei de controle — por exemplo, posicionamento de pólos, mínima variação, etc. — usando “princípio da equivalência certa” descrito na seção 7.8.4. Apesar disso, descobriu-se que ambos tipos de controle têm muitos pontos em comum e que na realidade podem ser teoricamente colocados sob uma abordagem unificada.

O STC é em geral desenvolvido para sistemas discretos no tempo. A análise de estabilidade é bem diferente em relação à análise correspondente do MRAC, geralmente desenvolvido para sistemas contínuos no tempo. A análise do STC é geralmente mais difícil e supõe que os sinais do sistema sejam ricos o suficiente para garantir a convergência da estimação paramétrica. Em compensação, o STC é mais flexível, do ponto de vista do projetista, pois permite uma escolha ampla do tipo de controlador e do estimador de maneira independente — isto é, separação dos dois problemas.

A análise do MRAC é simples no caso de plantas de grau relativo 1, mas é bem mais complicada nos demais casos.

7.8.6 Projeto de Controladores Adaptativos

O projeto pode ser dividido em três partes:

- Escolha de uma lei de controle contendo parâmetros ajustáveis.
- Escolha de uma lei de adaptação para ajustar os parâmetros.
- Análise das propriedades de convergência e de estabilidade do sistema de controle resultante.

Tais passos podem ser identificados claramente no exemplo 7.4.

Quando se opta pelo STC os dois primeiros passos são muitos livres tendo em vista a variedade de leis de controle e de estimação paramétrica recursiva existentes na literatura. A dificuldade é provar que a combinação escolhida resulta em um sistema estável e que o objetivo de controle seja atingido.

A análise do MRAC já está muito bem sistematizada no caso monovariável⁶. Restam ainda muitos problemas sobretudo para garantir a robustez do sistema a perturbações, a dinâmicas não modeladas, etc., e também no caso multivariável — [?], [?] e [?]. Estas questões já foram abordados porém

⁶ Ver [?] para mais detalhes.

os resultados ainda são alvos de críticas. Outra questão bastante aberta é a caracterização do transitório de adaptação. Geralmente, o ajuste dos ganhos de adaptação — isto é, dos parâmetros da própria lei de adaptação — é feito por tentativa e erro através de algumas regras heurísticas.

Existem dois grandes cenários para projeto de sistemas adaptativos: Conhecermos o estado do sistema ou somente a saída — medida por um sensor.

Na prática temos poucos sensores para a planta. Isto quer dizer que, em geral, não dispomos da medida do estado (vetor completo) mas apenas de algumas poucas saídas. Poderíamos ainda pensar em utilizar um observador adaptativo e usar o princípio da equivalência certa para considerar o estado estimado como o estado verdadeiro. Porém a combinação de estimação paramétrica combinada com observação adaptativa mostrou-se de difícil solução com prova de estabilidade. Felizmente a solução existe e os observadores são substituídos por “filtros de estado” que são filtros de ordem adequada cujas entradas são a entrada da planta e a saída da planta. O estado desses filtros serão então utilizados no lugar do vetor de estado da planta que não é mensurável fisicamente.

No exemplo 7.3, notamos que o estado completo da planta era $\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ e que para implementar a lei de controle adaptativo era necessário medir x e \dot{x} . Vamos mais adiante reprojeter o MRAC supondo que medimos apenas a saída — no exemplo 7.3, a posição x .

7.8.7 Controle Adaptativo de Sistemas de Primeira Ordem

Os sistemas de primeira ordem servem para ilustrar uma abordagem geral do caso de ordem superior. Por si só tais sistemas já possui interesse prático pois modelam, por exemplo, a frenagem de um automóvel, a descarga de um “flash” eletrônico ou a vazão de um fluido de um tanque. O sistema de primeira ordem é descrito por (7.40).

$$\dot{y} = -a_p y + b_p u \quad (7.40)$$

Os parâmetros a_p e b_p são desconhecidos.

7.8.7.1 Especificação de Desempenho

Escolhemos um modelo de referência conforme (7.41).

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r(t) \quad (7.41)$$

Em termos de entrada r e saída y_m este pode ser representado por $y_m = Mr$. O termo M é o modelo de referência dado por (7.42), onde $p \triangleq \frac{d}{dt}$ é o operador diferencial.

$$M = \frac{b_m}{p + a_m} \quad (7.42)$$

Note que M corresponde a uma função de transferência estritamente positiva real (SPR).

Desejamos construir uma lei adaptativa para o sistema (7.40) de modo que, independente de $r(t)$, o erro $e \triangleq y - y_m$ tenda assintoticamente a zero. Supomos apenas que o sinal de b_p é conhecido — note que b_p é o ganho de alta frequência.

7.8.7.2 Escolha da Lei de Controle

Como existe uma lei de controle u^* — tal que se $u = u^*$ — dada por $u^* = \theta_1^* r + \theta_2^* y$ com $\theta_1^* = \frac{b_m}{b_p}$ e $\theta_2^* = \frac{a_p - b_m}{b_p}$.

Obtem-se (7.43) onde o par $(a_m, b_m) \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\dot{y}_p = -a_m y_p + b_m r \quad (7.43)$$

Portanto:

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t)$$

Este resultado leva ao objetivo especificado — $e(t) \rightarrow 0, \forall r(t)$ — é natural parametrizar a lei de controle adaptativo conforme (7.44).

$$u(t) = \theta_1 r(t) + \theta_2 y(t) \quad (7.44)$$

Os parâmetros ajustáveis da equação (7.44) são θ_1 e θ_2 .

7.8.7.3 Escolha da Lei de Adaptação

Para escolhermos a lei de adaptação, vamos focalizar nossa atenção para o efeito do erro paramétrico, que em forma vetorial é dado por (7.45) sobre o erro de saída.

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_1^* \\ \theta_2 - \theta_2^* \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Para tanto, vamos desenvolver a equação do erro de saída. Subtraindo (7.41) de (7.40) obtemos (7.46).

$$\dot{e}(t) = -a_p y + a_m y_m + b_p u - b_m r \quad (7.46)$$

Como $y_m = y - e$ chegamos à equação (7.47).

$$\dot{e}(t) = (a_m - a_p)y - a_m e(t) + b_p u - b_m r \quad (7.47)$$

E em seguida, (7.48) onde $w = \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix}$.

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p (u - \theta^{*T} \mathbf{w}) \quad (7.48)$$

Em termos do erro paramétrico, chegamos à equação (7.49).

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p (\tilde{\theta}^T \mathbf{w}) \quad (7.49)$$

Em forma de entrada/saída, temos (7.50).

$$e(t) = \frac{b_p}{p + a_m} (\tilde{\theta}^T \mathbf{w}) \quad (7.50)$$

Para projetar a lei de adaptação podemos adotar a estratégia de propor uma função de Lyapunov V (candidata) e sintetizar a lei de adaptação de modo a garantir estabilidade fazendo com que \dot{V} seja negativa definida ou pelo menos semi-definida negativa. Para sistemas (7.49) propomos uma função de Lyapunov quadrática no erro de saída — aqui coincide com erro de estado — e no erro paramétrico conforme (7.51) com $c \in \mathbb{R}_+^*$.

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{e^2(t)}{2} + c \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{2} \quad (7.51)$$

A derivada de (7.51) derivada é (7.52). O parâmetro c será definido adiante.

$$\dot{V} = e(t) \dot{e}(t) + c \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (7.52)$$

Substituindo a equação do erro (7.49) na equação (7.52) resulta em (7.53).

$$\dot{V} = e(t) [-a_m e(t) + b_p(\tilde{\theta}^T \mathbf{w})] + c \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (7.53)$$

Observamos que \dot{V} é composto de uma parcela negativa, a segunda sem sinal definido e a terceira onde podemos escolher $\tilde{\theta}$. A escolha mais sensata é cancelar o termo indefinido escolhendo $\tilde{\theta}$ como (7.54).

$$\tilde{\theta} = \frac{b_p}{c} \mathbf{w} e(t) \quad (7.54)$$

Ou seja, elemento a elemento, fazendo $\gamma = \frac{|b_p|}{c}$.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{\tilde{\theta}}_1 = -\text{sign}(b_p) \gamma r e(t) \\ \dot{\theta}_2 = \dot{\tilde{\theta}}_2 = -\text{sign}(b_p) \gamma y e(t) \end{cases} \quad (7.55)$$

O parâmetro γ é livre desde que seja positivo não-nulo.

Observe que não é necessário conhecer b_p , apenas seu sinal. O valor de b_p entra apenas na análise das equações (7.51) e (7.52). Com a lei (7.55) temos então que a função (7.51), reescrita como (7.56).

$$V(e(t), \tilde{\theta}) = \frac{e^2(t)}{2} + \frac{|b_p|}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \theta > 0 \quad (7.56)$$

Esta função de Lyapunov é positiva definida e tem derivada com relação ao tempo dada por (7.57) que é negativa semi-definida.

$$\dot{V}(e(t), \tilde{\theta}) = -a_m e^2(t) \leq 0 \quad (7.57)$$

Até aqui já podemos afirmar que todos os sinais do sistema são limitados — dependendo das condições iniciais. De fato, como função do tempo, $V(t)$ ao longo de uma trajetória satisfaz a equação (7.58) $\forall t \geq 0$.

$$V(t) \leq \frac{e^2(t)}{2} + c \tilde{\theta}^T(0) \tilde{\theta}(0) \quad (7.58)$$

Como $y_m(t)$ é uniformemente limitado, $y(t)$ também será. Todos os dois parâmetros ajustáveis também são limitados pois os erros paramétricos o são. Na realidade temos estabilidade global no espaço $(e(t), \tilde{\theta})$ pois $V(t)$ é radialmente ilimitada e $\dot{V}(t) \leq 0$.

7.8.7.4 Análise de Convergência

Como no exemplo da massa desconhecida, não é possível provar a convergência dos erros — de estado e dos parâmetros estimados — para a origem. Basta ver no caso em que $y_m \equiv r \equiv 0$. Assim, a equação dos erros fica sendo (7.59) — Assumindo $b_p \in \mathbb{R}_+^*$ e $\gamma = 1$ por simplicidade.

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p \tilde{\theta}_2 e(t) \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{\theta}_2 = -e^2(t) \end{cases} \quad (7.59)$$

Temos como pontos de equilíbrio $e(t) = 0$ com $\tilde{\theta}_1$ e $\tilde{\theta}_2$ constantes quaisquer, isto é, todo o plano $e(t) = 0$ no espaço $(e(t), \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ é de equilíbrio. Portanto a convergência global não se verifica. Apesar disso, podemos provar que, independente de r , o erro de rastreamento tende a zero. Para isso, usamos o Lema de Barbalat (lema 6.3).

Agora, basta notar que $V(t) \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{V}(t) \in \mathbb{R}_+$; isto significa que $V(t)$ tende para uma constante e $V(t) \in (0, V(0)]$ para todo t . Ainda, $\dot{V}(t)$ existe e é contínua com derivada $\ddot{V}(t)$ dada por (7.60).

$$\ddot{V}(t) = -2a_m e(t)\dot{e}(t) \tag{7.60}$$

Por outro lado, tem-se que $\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$. Como os sinais $e(t)$, $\tilde{\theta}$ e \mathbf{w} são uniformemente limitados, conclui-se que $\ddot{V}(t)$ é uniformemente limitado. Aplicando o Lema de Barbalat conclui-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \tag{7.61}$$

O diagrama de blocos do sistema adaptativo é apresentado na figura 7.8.

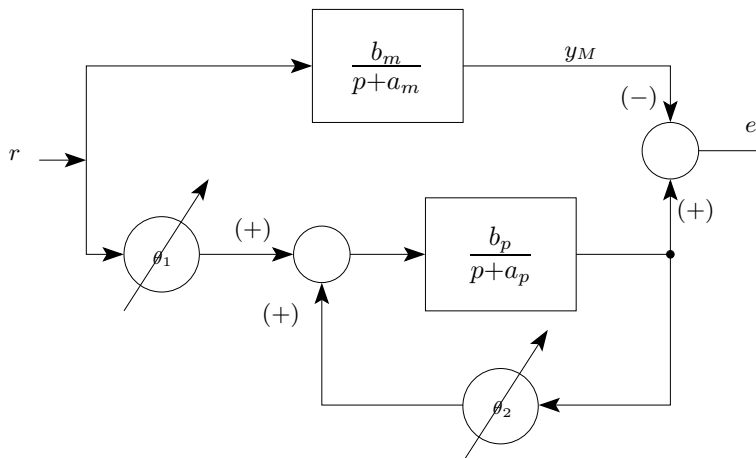


Figura 7.8. MRAC para um sistema de primeira ordem.

Exemplo 7.5: Seja uma planta dada por (7.62).

$$\dot{y} = y + 3u \tag{7.62}$$

Note que a planta é instável em malha aberta. Os parâmetros $a_p = -1$, $b_p = 3$ são supostos desconhecidos para o controlador adaptativo. O modelo de referência escolhido é (7.63).

$$\dot{y}_m = -4y_m + 4r \tag{7.63}$$

Isto é, $a_m = b_m = 4$. O ganho de adaptação γ escolhido é 2. Os valores iniciais dos parâmetros ajustáveis são nulos, indicando que não temos conhecimento a priori desse parâmetro. As condições iniciais da planta e do modelo são também nulas neste exemplo.

Dois sinais de referência são utilizados:

- $r(t) = 4$: Vemos que o erro $e(t)$ tende a zero, porém os parâmetros não tendem aos valores ideais — figura 7.9.
- $r(t) = 4\sin(3t)$: Agora, além do erro $e(t)$ tender a zero, também os parâmetros convergem aos valores de θ^* — figura 7.10. ★

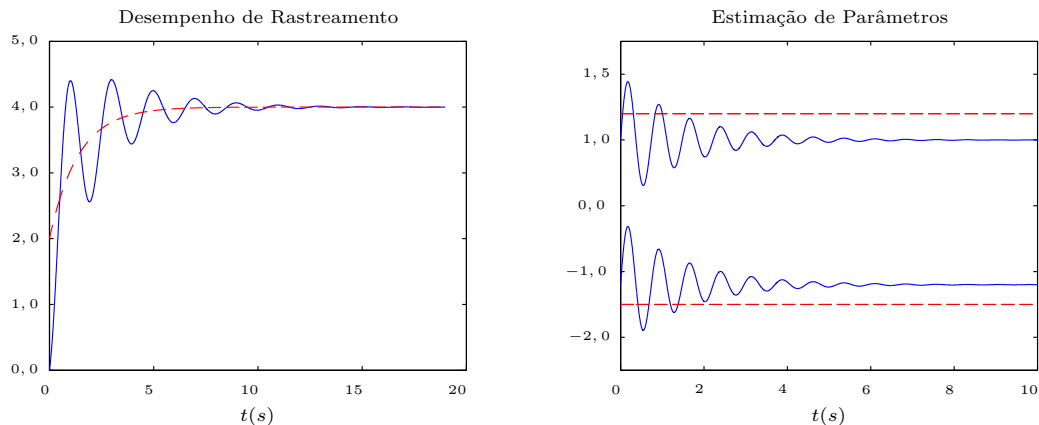


Figura 7.9. Resposta ao degrau: MRAC para um sistema de primeira ordem.

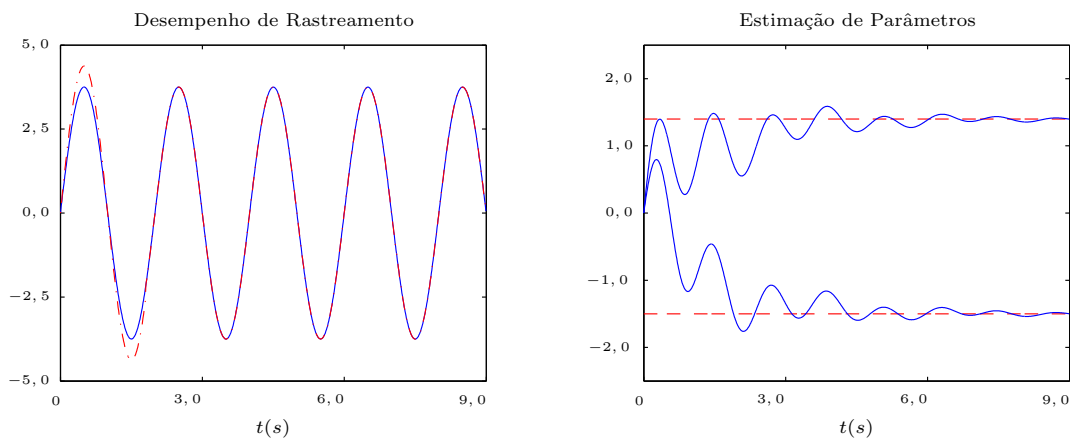


Figura 7.10. Resposta à senóide: MRAC para um sistema de primeira ordem.

A convergência paramétrica exige riqueza do sinal de excitação. No segundo caso vemos que uma senóide é rica o suficiente. A rapidez de convergência depende muito de γ . Se por muito baixo, a convergência é lenta, se for muito alta, o sinal de controle poderá ficar muito oscilatório excitando dinâmicas não modeladas (parasitas) podendo até instabilizar um sistema em condições reais.

7.8.8 MRAC para Sistemas de Ordem Superior

A generalização do MRAC para sistemas de ordem maior que 1 é simples no caso de grau relativo 1 — isto é, o excesso de pólos em relação aos zeros finitos — por exemplo, com função de transferência dada pela equação (7.64)

$$G_p(p) = K_p \frac{p + \beta}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} \quad (7.64)$$

A generalização é baseada no lema 7.1.

Lema 7.1: Consideremos dois sinais $e(t)$ e φ relacionados pela equação dinâmica (7.65) onde $e(t)$ é um sinal de saída escalar, $H(p)$ é uma função de transferência estritamente positiva real (SPR), k é uma constante desconhecida a menos do sinal, $\varphi(t)$ é um vetor $\varphi \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ função do tempo e $\omega(t)$ é um vetor $m \times 1$ de sinais mensuráveis.

$$e(t) = H(p) (k \varphi(t)^T \omega(t)) \quad (7.65)$$

Se $\varphi(t)$ variar de acordo com a equação (7.66), com γ sendo uma constante positiva (arbitrária), então $e(t)$ e $\varphi(t)$ são limitadas globalmente — isto é, a partir de qualquer condição inicial.

$$\dot{\varphi}(t) = -\text{sign}(k) \gamma \omega(t) e(t) \quad (7.66)$$

Além disso, se $\omega(t)$ for limitado, então tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

■

Note que o lema 7.1 poderia ter sido utilizado para (7.50); pois, fazendo $k = b_p$ e $H(p) = \frac{1}{p+a_m}$ podemos aplicar o lema 7.1 para concluir que $e(t)$ e $\varphi(t)$ são limitados. Em seguida, conclui-se que $\omega(t)$ é limitado e que o erro converge.

O vetor regressor (7.67), no caso $n^* = 1$ de ordem qualquer, é formado pela entrada de referência, pelos estados dos 2 filtros (idênticos) de entrada e saída da figura 7.11 e pela saída.

$$\omega = \begin{bmatrix} r \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ y \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

Os filtros são de ordem $(n-1)$ e devem ter pólos iguais aos zeros do modelo de referência (estáveis por hipótese). Note-se que $\omega_1, \omega_2, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \Lambda \omega_1 + h u & \omega_1 &\in \mathbb{R}^{n-1} \\ \dot{\omega}_2 &= \Lambda \omega_2 + h y & \omega_2 &\in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

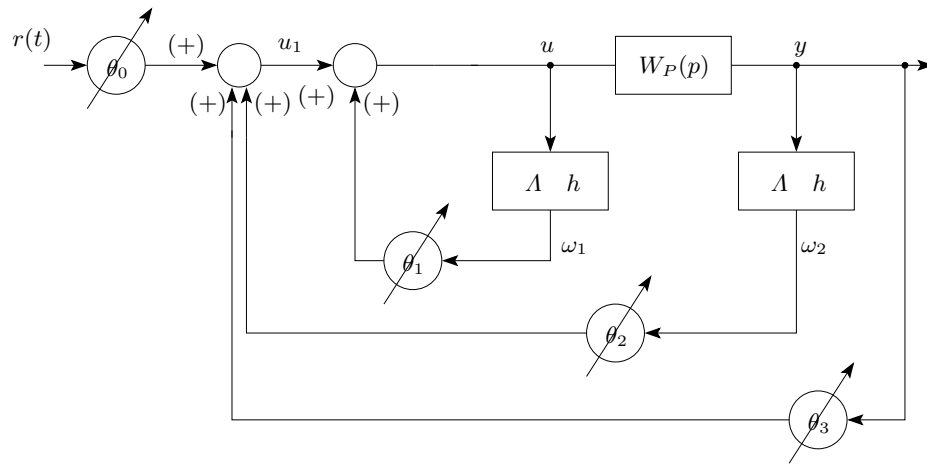


Figura 7.11. MRAC para um sistema de ordem n e grau relativo 1.

8

Controle a Estrutura Variável por Modos Deslizantes

8.1 Introdução

Para esta capítulo é recomendada a leitura de [?].

- Emel'yanov e Barbashin (década de 1960) na Rússia.
- Itkis (1976) e Utkin (1976) em inglês.
- Muitas métodos baseados em VSC foram desenvolvidos: Reguladores robustos, sistemas com modelo de referência, esquemas adaptativos, sistemas de rastreamento, observadores de plantas com incertezas e detecção de falhas.
- Muitas aplicações bem sucedidas foram reportadas na literatura: Controle automático de vôo, controle de motores elétricos, processos químicos, aumento da estabilidade de helicópteros, sistemas espaciais e robótica.
- O conceito de Estrutura Variável.

Exemplo 8.1: Seja o sistema $\ddot{y} = u(t)$. Utilizando a lei de realimentação linear $u(t) = -ky(t)$, obtém-se a equação $\ddot{y} = -ky$. O retrato de fase para qualquer $k \in \mathbb{R}_+^*$ são elipses dadas por $\dot{y}^2 + ky^2 = c$ conforme a figura 8.1.

Agora, vamos chavear entre dois valores positivos k_1 e k_2 de k sendo estes escolhidos nos intervalos $k_1 \in (0, 1)$ e $k_2 \in (1, \infty)$ com a lei de comutação (8.1).

$$u = \begin{cases} -k_1x & \text{if } y\dot{y} < 0 \\ -k_2x & \text{if } y\dot{y} > 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

★

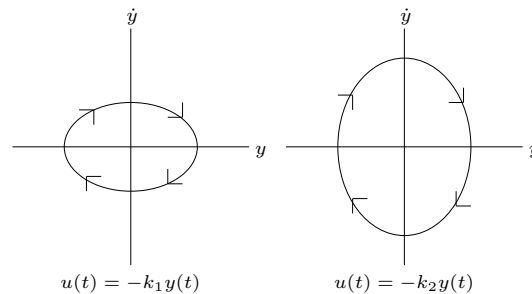


Figura 8.1. Retratos de fase para o movimento harmônico simples.

Fato 8.1: Dois subsistemas que não sejam assintoticamente estáveis (AE) resultam em um sistema assintoticamente estável (AE) após sua combinação. \diamond

8.2 Propriedades do Regime Deslizante

- O controle chaveia com frequência “infinita” no deslizamento
- Controle equivalente é o que faz $s \equiv 0$: $u_{eq} = -m \dot{y}$.
- Filtrando u com filtro passa baixa $u_{av} = \frac{1}{\tau p + 1} u$ temos uma aproximação de u_{eq} .
- $u(t) = u_{av}(t) + (u(t) - u_{av}(t))$, o primeiro termo sendo de baixa frequência e o segundo de alta frequência.
- A abordagem do espaço de estado.

9

Complementos

9.1 Critério de Popov utilizando LMIs

Considere o problema de estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por uma equação diferencial do tipo (9.1) com $f_i(0) = 0$ e $j = 1, \dots, n$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e as funções $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ não são necessariamente lineares.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) \quad (9.1)$$

Este sistema (9.1) pode ser escrito em uma notação compacta apresentada em (9.2) onde $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. A matriz \mathbf{A} é construída com os elementos a_{ij} da equação (9.1) e a função \mathbf{f} é definida como

$$\mathbf{f} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (9.2)$$

Testes de estabilidade podem ser facilmente estendidos com uma classe geral de funções setoriais de acordo com a teoria de estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e. Estas funções são definidas como (9.3) para γ e δ nos seguintes intervalos: $\gamma \in [0, 1]$ e $\delta \in [1, \infty)$ respectivamente.

$$\mathcal{F}(\gamma, \delta) \triangleq \{ \mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \tau^2 < \mathbf{f}(\tau)\tau < \delta \tau^2, \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \} \quad (9.3)$$

Também foi assumido que **as integrais de todas as funções em $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$ são radialmente ilimitadas.**

9.2 Resultado de Estabilidade Principal

Escolhendo (9.4) como candidata a função de Lyapunov, onde a matriz \mathbf{W} é positiva definida e a matriz \mathbf{P} é diagonal formada pelos elementos p_{ii} da equação (9.4).

$$v(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^n p_{ii} \int_0^{x_i} f(\tau) d\tau \quad (9.4)$$

Na teoria da estabilidade absoluta, a função de Lur'e é associada ao critério de Popov no domínio da frequência enquanto a forma quadrática é associadas ao critério do círculo.

A derivada no tempo da função (9.4) ao longo de qualquer trajetória do sistema (9.2) é dada por (9.5).

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{f}^T \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{x} + \mathbf{f}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{f} \quad (9.5)$$

As condições de setor (9.3) podem ser expressas como (9.6) com $i = 1, \dots, n$.

$$(f_i - \gamma_i x_i) (f_i - \delta_i x_i) < 0 \quad (9.6)$$

De forma equivalente, tem-se a equação (9.7), onde $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ são matrizes diagonais definidas como $\mathbf{\Gamma} \triangleq \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e $\mathbf{\Delta} \triangleq \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ respectivamente.

$$\mathbf{f}^T \mathbf{f} - \mathbf{f}^T (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Delta}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Delta} \mathbf{x} < 0 \quad (9.7)$$

Combinando (9.5) e (9.6), conclui-se que:

Se a equação (9.8) verifica-se para alguma matriz diagonal \mathbf{Q} definida por:

$$\mathbf{Q} \triangleq \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$$

Então a solução do sistema (9.2) é globalmente assintoticamente estável (GAE) para toda $f_i \in \mathcal{F}(\gamma_i, \delta_i)$ com $i = 1, \dots, n$.

$$\dot{v}(\mathbf{x}) < \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} - \mathbf{f}^T (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Delta}) \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Delta} \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (9.8)$$

A desigualdade (9.8) pode ser escrita como (9.9).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \mathbf{W} + \frac{1}{2}(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Delta}) \mathbf{Q} \\ \mathbf{W} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Delta}) & -\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Delta} \mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.9)$$

A discussão acima é resumida no seguinte teorema:

Teorema 9.1: *A solução do sistema não-linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é globalmente assintoticamente estável (GAE) para toda função $f_i \in \mathcal{F}(\gamma_i, \delta_i)$ com $i = 1, \dots, n$, se existem matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} diagonais e positiva definidas e uma matriz \mathbf{W} positiva definida e simétrica tal que a desigualdade (9.9) verifica-se. ■*

Uma característica interessante de (9.9) é que os parâmetros $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ não estão diretamente envolvidos na dinâmica da matriz \mathbf{A} . Esta propriedade será explorada para encontrar a melhor estimativa possível para os parâmetros setoriais.

O teorema 9.1 inclui vários resultados clássicos como casos especiais. Certamente, verifica-se como o teorema 9.1 estabelece uma ligação entre uma função puramente quadrática, tipo Lur'e e tipo Persidskii (tipo integral).

Este teorema é relevante desde que, do ponto de vista da teoria da estabilidade absoluta, estas funções são respectivamente relacionadas aos critérios do círculo e de Popov (caso de uma não-linearidade escalar) e ao teorema de Persidskii (caso de um vetor de não-linearidades).

Um único LMI — equação (9.9) — pode solucionar estes problemas de uma forma unificada.