

|       |                                                          |
|-------|----------------------------------------------------------|
| UFRJ  | Universidade Federal do Rio de Janeiro                   |
| COPPE | Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia |
| PEE   | Programa de Engenharia Elétrica                          |

COV-758      Comunicação e Controle

Prof. Ramon

## Organização do curso

Sala de aula : \*

Horário : 3<sup>a</sup>. feira 10:30 – 12:30

: 5<sup>a</sup>. feira 10:30 – 12:30

Atendimento : 4<sup>a</sup>. feira 10:00 – 12:00

Professor : Liu Hsu

Ramon R. Costa

Telefone : 2562-8605

2562-8604

e-mail : [liu@coep.ufrj.br](mailto:liu@coep.ufrj.br)

[ramon@coep.ufrj.br](mailto:ramon@coep.ufrj.br)

Laboratório : H-345

H-345

Homepage : <http://www.coep.ufrj.br/~liu>

: <http://www.coep.ufrj.br/~ramon>

: <http://www.coep.ufrj.br/~teleduc>

## Pré-requisitos

(Desejável:)

★ Álgebra Linear

★ Sistemas Lineares

## Objetivos do curso

- ★ Introdução à modelagem e análise de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) contínuos.
- ★ Introdução às ferramentas e métodos de controle.
- ★ Domínio na utilização do Matlab/Simulink para a simulação de sistemas em malha fechada.
- ★ Experimentação com controladores implementados em microcontroladores.

## Descrição do curso

1. Modelos matemáticos de sistemas dinâmicos
2. Análise da resposta transitória
3. Introdução à estabilidade
4. Projeto de controladores
5. Introdução ao MATLAB
6. Implementação digital
7. Aplicações

## Duração do curso

Início : 22/jul

Término : 24/ago

★ 20 horas-aula

## Plano de aulas simplificado

### 1. Modelos matemáticos de sistemas dinâmicos ..... 4 aulas

- Funções de transferência
- Diagramas de blocos
- Equações de estado
- Sistemas lineares e não-lineares
- Modelos de sistemas mecânicos
- Modelos de sistemas elétricos
- Modelos de sistemas hidráulicos
- Modelos de sistemas térmicos
- Linearização

## Plano de aulas simplificado

2. Análise ..... 3 aulas
  - Respostas transitórias: sistemas de 1a. e 2a. ordens
  - Estabilidade
3. Projeto de controladores ..... 4 aulas
  - PID
  - Realimentação de estado
4. Matlab ..... 1 aula
  - Operações com matrizes
  - Geração de figuras
  - Utilização do Control Toolbox
  - Utilização do Symbolic Toolbox

## Plano de aulas simplificado

### 5. Implementação ..... 2 aulas

- Implementação usando microcontroladores
- Trabalho #1: Controle de um duplo integrador
- Trabalho #2: Controle de um motor DC+encoder

### 6. Aplicações ..... 2 aulas

- Posicionamento dinâmico de um navio/plataforma
- Controle de um ROV

**TOTAL : 16 aulas**

Em resumo ...

Pouco tempo pra brincadeira !

## Exercícios & trabalhos

Durante o curso os alunos receberão:

- 3 listas de exercícios
  - 1 trabalho/projeto
- ★ Poderão requerer a utilização do pacote **MATLAB** e seus toolboxes.

## Avaliação

- ★ Base: exercícios e trabalhos .
- ★ Não serão aplicadas provas .
- ★ Para aprovação no curso o aluno deverá ter média final  $\geq 5$  .

## Livros textos

- [1] **K. Ogata** ,  
**Modern Control Engineering** ,  
3rd Edition, Prentice Hall , **1997**.
- [2] **B. C. Kuo** ,  
**Automatic Control Systems** ,  
7th Edition, Prentice Hall , **1995**.

## Bibliografia complementar

- [1] C. T. Chen ,  
Linear Systems Theory and Design ,  
3rd Edition, Oxford , 1999.
  
- [2] Gene Franklin & J. David Powell & Michael L. Workman ,  
Digital Control of Dynamic Systems ,  
Addison–Wesley , 1990.
  
- [3] Charles L. Phillips & H. Troy Nagle ,  
Digital Control Systems Analysis & Design ,  
3rd Edition, Prentice–Hall , 1995.

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro  
EE Escola de Engenharia  
DEL Departamento de Eletrônica

COV-758 Comunicação e Controle

## Capítulo # 1

# 1 Modelos matemáticos de sistemas dinâmicos

## Conteúdo

1. Introdução
2. Equações diferenciais ordinárias (EDO)
3. Resposta ao impulso
4. Transformada de Laplace
5. Funções de transferência
6. Diagramas de blocos
7. Equações de estado
8. Realização de funções de transferências
9. Modelagem de sistemas dinâmicos lineares
10. Sistemas não lineares e linearização

## 1.1 Introdução

Nossa visão de sistema : algo com terminais de entrada e saída.

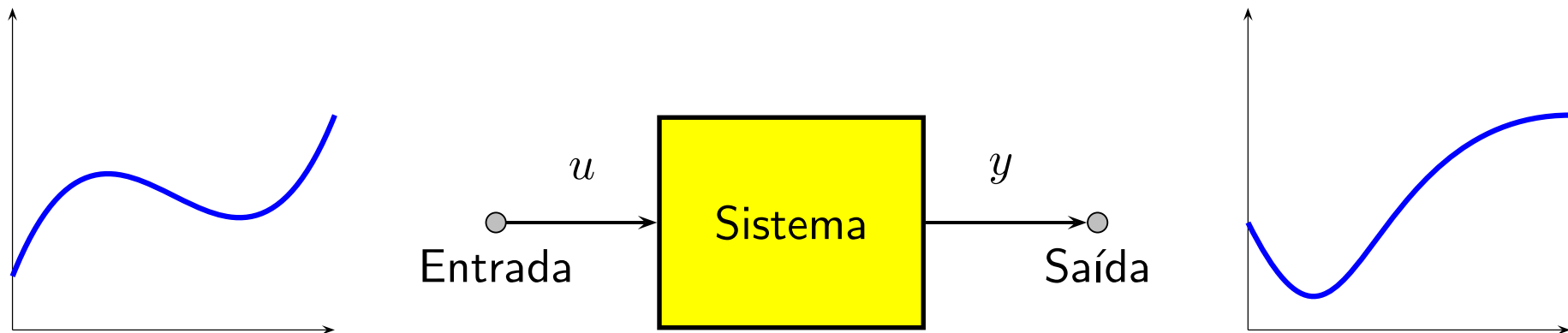


Figura 1: Sistema.

**Classificação de sistemas :**

Lineares

Não lineares

Contínuos

Discretos

Invariantes

Variantes no tempo

SISO

MIMO

Determinísticos

Estocásticos

Neste curso :

★ Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) .

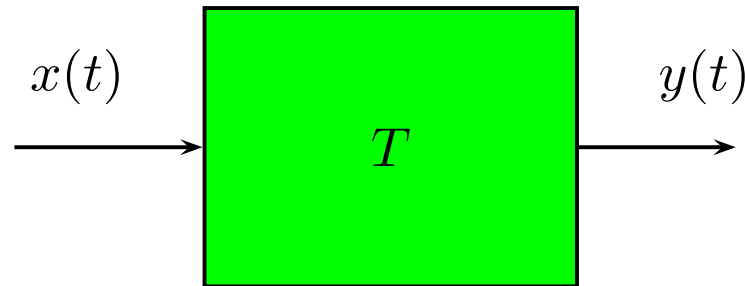
## Motivação

- ★ Controlar um sistema significa impor certas propriedades aos seus sinais de saída como, por exemplo, *overshoot*.
- ★ A entrada é o sinal que pode ser livremente manipulado.
- ★ É necessário um modelo do sistema para se poder calcular o sinal de controle necessário para se impor as propriedade desejadas à saída.
- ★ Estratégias adequadas de controle permitem obter bom desempenho mesmo com um modelo impreciso do sistema.

## Representação

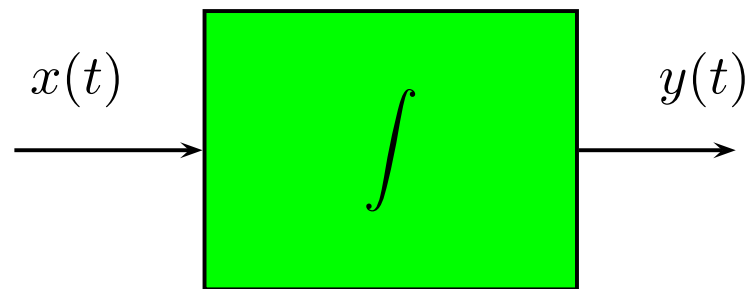
Um sistema é definido matematicamente como uma transformação ou operador :

$$y(t) = T\{x(t)\}$$



**Exemplo 1** Integrador

$$y(t) = \int_0^t x(\zeta) d\zeta$$



Considere 2 sinais de entrada distintos :

$$y_1(t) = T\{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = T\{x_2(t)\}$$

Propriedade (*Aditividade*)

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)$$

Propriedade (*Homogeneidade*)

$$T\{ax_i(t)\} = aT\{x_i(t)\} = ay_i(t)$$

Combinando-se estas 2 propriedades, tem-se o ...

## Princípio da superposição

$$T\left\{a x_1(t) + b x_2(t)\right\} = a y_1(t) + b y_2(t)$$

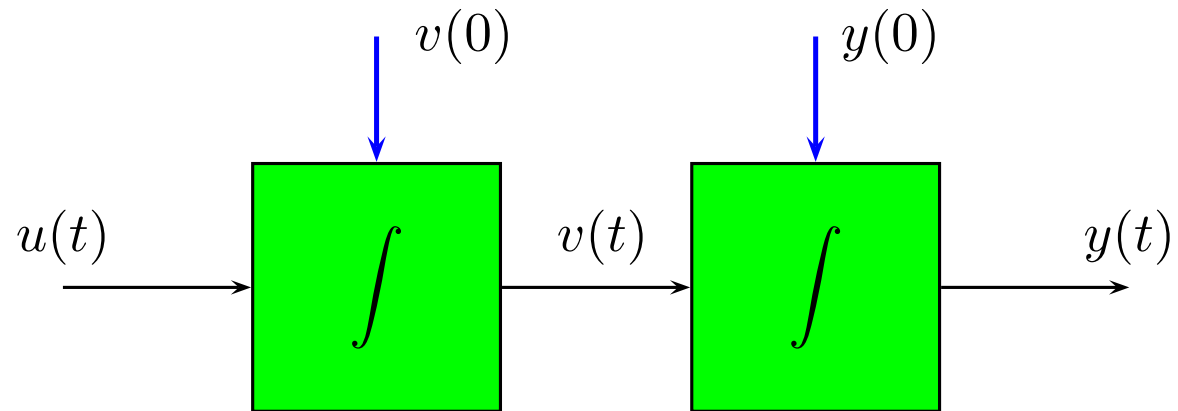
## Propriedade *(Linearidade)*

A classe de sistemas que satisfaz o princípio da superposição é dito **linear**.

- ★ Nos **sistemas dinâmicos**, a resposta à **condição inicial** também deve satisfazer o princípio da superposição.

**Exemplo 2**

Duplo integrador.



É fácil verificar que se para  $u_1(t)$ ,  $v_1(0)$  e  $y_1(0)$  :

$$y_1(t) = \int_0^t \left( \int_0^t u_1(\tau) d\tau + v_1(0) \right) d\zeta + y_1(0)$$

e para  $u_2(t)$ ,  $v_2(0)$  e  $y_2(0)$  :

$$y_2(t) = \int_0^t \left( \int_0^t u_2(\tau) d\tau + v_2(0) \right) d\zeta + y_2(0)$$

então

$$y_1(t) + y_2(t) = \int_0^t \left( \int_0^t [u_1(\tau) + u_2(\tau)] d\tau + [v_1(0) + v_2(0)] \right) d\zeta + [y_1(0) + y_2(0)]$$

★ O sistema é linear.

**Exemplo 3** Sistema não-linear.

Oscilador de Van der Pol :

$$\ddot{y} - \dot{y} - \theta \dot{y}^3 + y = 0$$

**Propriedade** (*Invariância no tempo*)

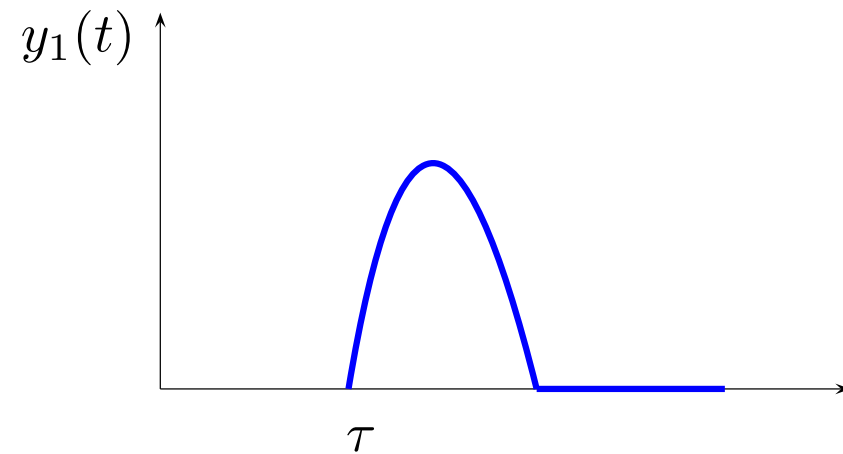
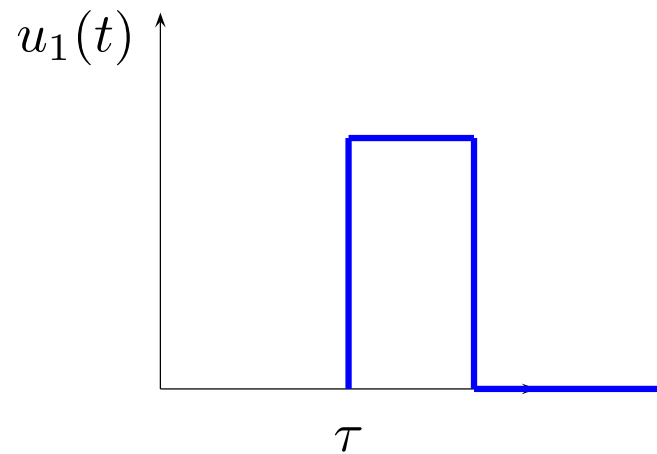
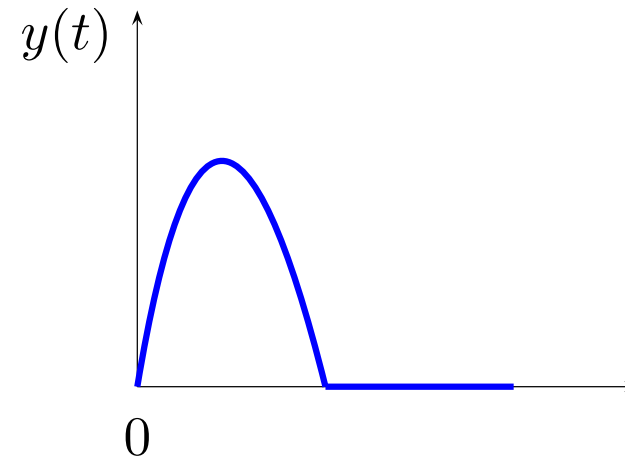
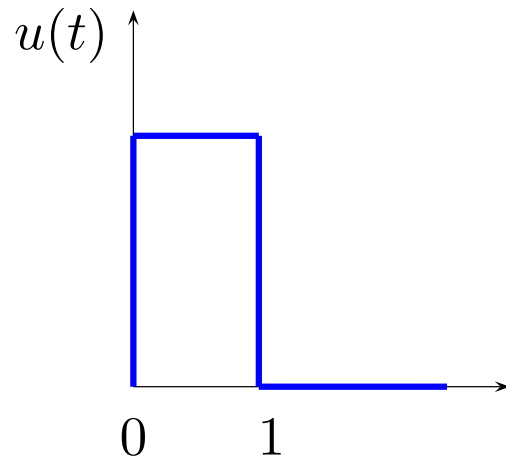
Um sistema é dito **invariante no tempo** se,  $\forall \tau$ ,

a entrada

$$x_1(t) = x(t - \tau)$$

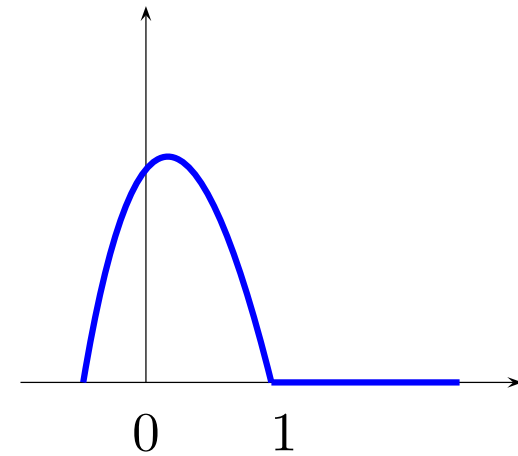
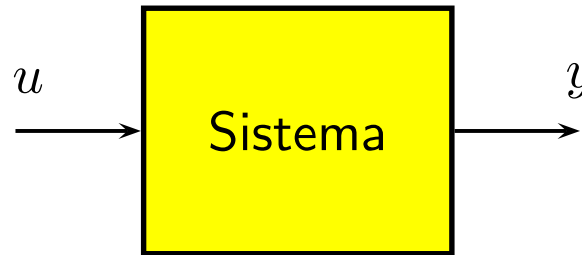
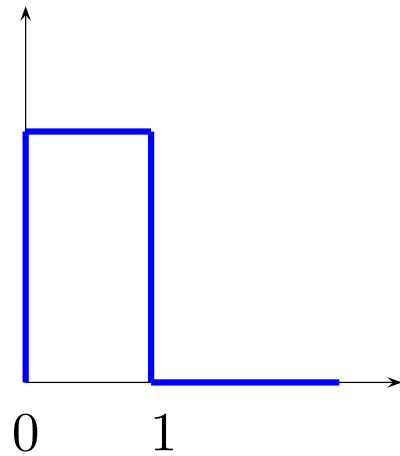
produz a saída

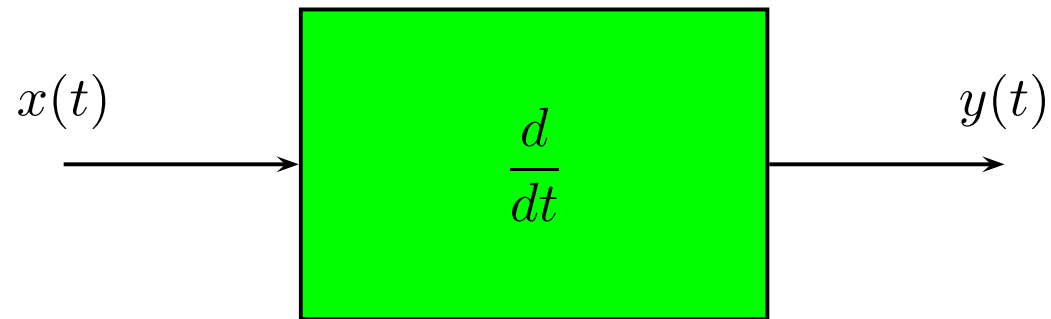
$$y_1(t) = y(t - \tau) .$$

**Exemplo 4** Sistema invariante.

## Propriedade *(Causalidade)*

Um sistema é dito **causal** se a sua saída atual depende somente das entradas atuais e passadas, i.e., não depende das entradas futuras.

**Exemplo 5** Sistema não causal.

**Exemplo 6** Sistema diferenciador.

★ A diferenciação (on line) não é uma operação causal.

**Exemplo 7** Sistema não causal discreto.

$$y[k] = 0.2 y[k - 1] + 0.5 y[k - 2] + u[k] - u[k + 1]$$

- ★ Exemplo de uma equação a diferenças (equação recursiva).
- ★ A saída atual depende do valor futuro do sinal de entrada  $u[k + 1]$ .

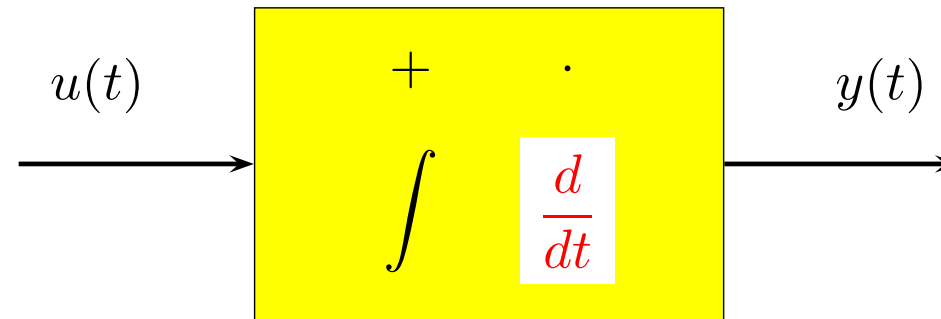
**Interpretação**

Figura 2: Interpretação de um SLIT.

## 1.2 Equações diferenciais ordinárias (EDO)

Forma geral :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

★ EDO linear de ordem  $n$ .



Causalidade  $\Leftrightarrow n \geq m$  .



Modelo temporal .

## Operador diferencial

### Definição

$$p = \frac{d}{dt}$$

Notação simplificada :

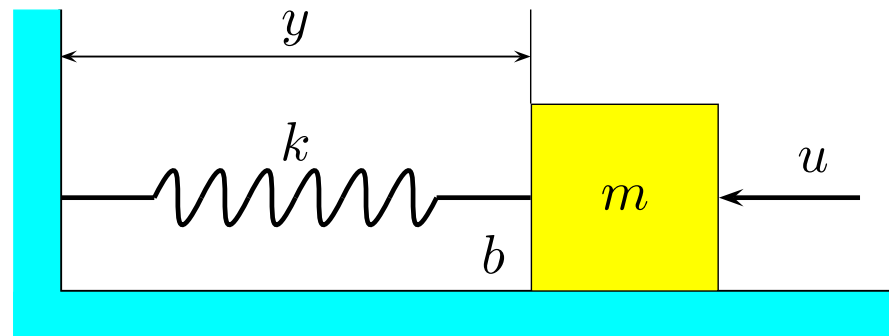
$$\left( a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right) y(t) = \left( b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \right) u(t)$$

ou melhor,

$$A(p) y(t) = B(p) u(t)$$

**Exemplo 8**

Sistema mecânico massa-mola-atrito.



A posição da massa  $m$  é descrita pela EDO de 2a. ordem

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = u$$

onde :  
 $m$  = massa  
 $b$  = coeficiente de atrito  
 $k$  = constante de mola

Usando o operador diferencial :

$$\left( mp^2 + bp + k \right) y = u$$

### 1.3 Resposta ao impulso



Modelo temporal :

$g(t)$  = resposta ao impulso.

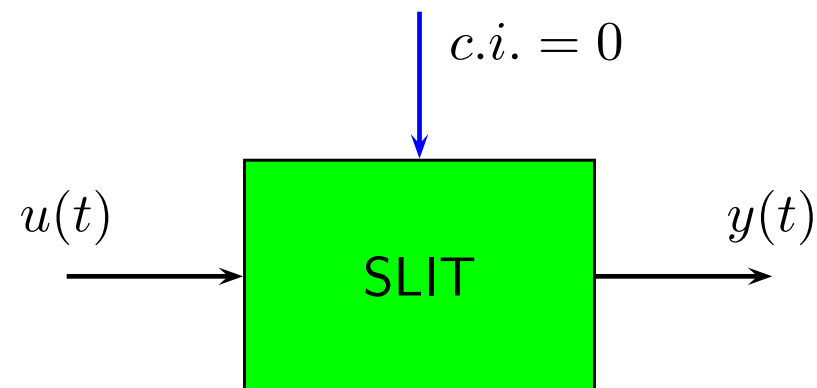


Figura 3: Resposta com condições iniciais nulas.

A resposta a uma entrada  $u(t)$  é dada pela **integral de convolução** :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

★  $g(t)$  = resposta do sistema com condições iniciais nulas a um impulso aplicado em  $t = 0$ .

★ A convolução é **comutativa** :

$$y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$$

**Exemplo 9**

## Sistema mecânico massa-mola-atrito.

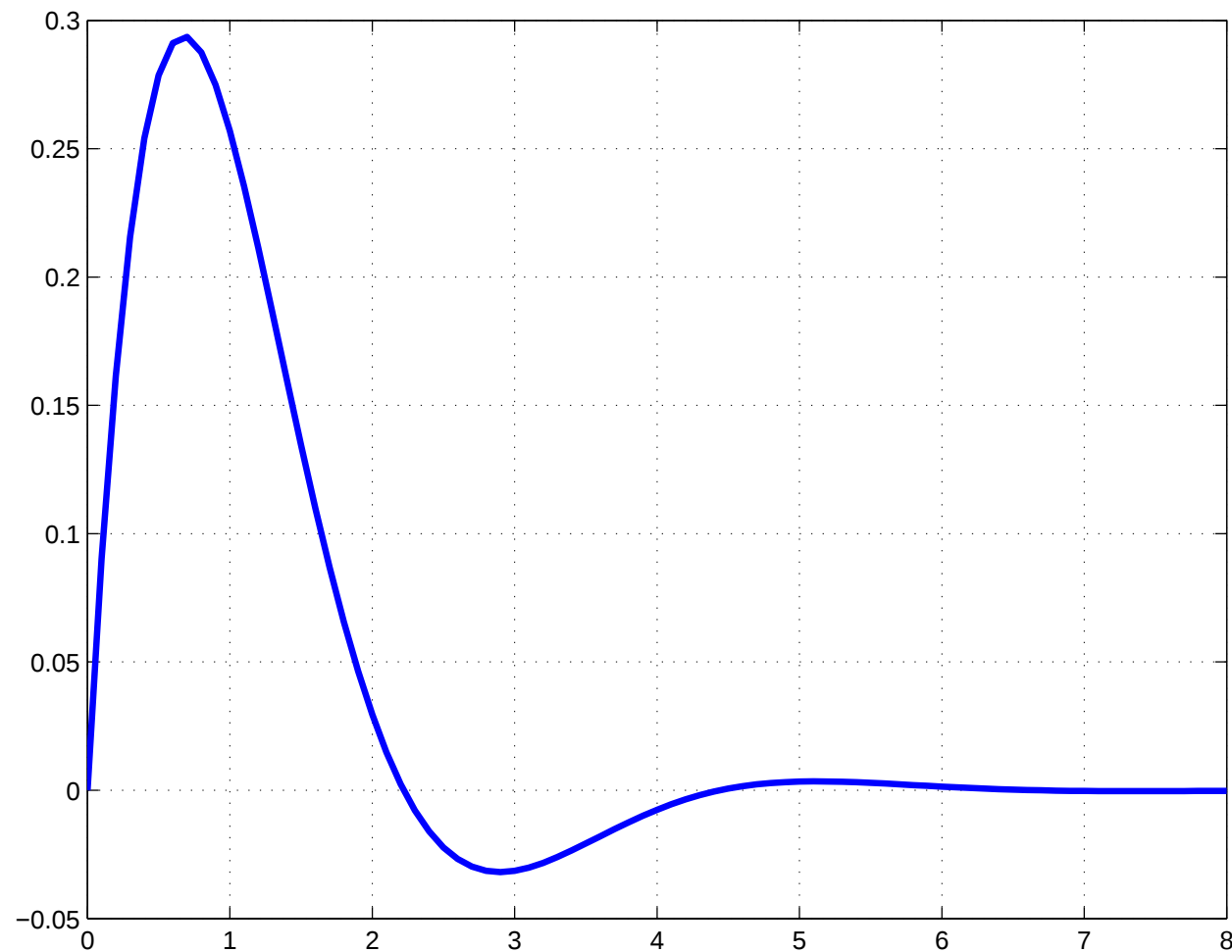


Figura 4: Resposta ao impulso. Simulação usando Matlab. Script **rimpulso.m**.

## 1.4 Transformada de Laplace

- ★ Útil na **solução analítica** de equações diferenciais ordinárias (EDOs).
- ★ Reduz uma EDO (no domínio temporal) a uma equação algébrica (no domínio complexo).

**Definição** (*Transformada de Laplace*)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

★  $s =$  variável complexa .

**Exemplo 10**

Função exponencial.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ k e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[k e^{-at}] \\ &= \int_0^{\infty} k e^{-at} e^{-st} dt \\ &= k \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \frac{k}{s+a} \end{aligned}$$

## Propriedades

$$(1) \quad \mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)]$$

$$(2) \quad \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

★ A Transformada de Laplace é **linear**.

**Teorema** (*Diferenciação*)

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

★  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

★  $f(0)$  é a condição inicial de  $f(t)$ .

**Teorema** (*Integração*)

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

**Teorema** (*Valor final*)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

★ Só se aplica se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existir.

**Teorema** (*Convolução*)

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)F_2(s)$$

## Transformada inversa

### Metodologia :

1. Determinar a expansão em frações parciais
2. Consultar tabelas de transformadas

### Metodologia alternativa :

1. Usar o MATLAB

## Expansão em frações parciais

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s + p_1} + \frac{r_2}{s + p_2} + \dots + \frac{r_n}{s + p_n}$$

★  $r_i =$  resíduos .

★  $p_i =$  pólos .

★ O caso geral envolve pólos múltiplos .

## Tabela

(Vide Ogata. pag. 22 e 23)

**Exemplo 11** Transformada de Laplace usando MATLAB.

Encontrar a transformada de :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ k e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

**Solução** :

```
>> syms t s a k  
>> f = k*exp(-a*t);  
>> F = laplace(f)
```

F =

k/(s+a)

```
>> _
```

**Exemplo 12** Anti-transformada de Laplace usando MATLAB.

Encontrar a anti-transformada de :

$$F(s) = \frac{k}{(s+a)^2}$$

**Solução** :

```
>> syms t s a k  
>> F = k/(s+a)^2;  
>> f = ilaplace(F)
```

f =

k\*t\*exp(-a\*t)

```
>> _
```

## 1.5 Função de transferência

Considere uma EDO :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

**Hipótese** : Todas as condições iniciais são nulas.

Aplicando-se a Transformação de Laplace em ambos os lados,

$$\left[ s^n + \cdots + a_1 s + a_0 \right] Y(s) = \left[ b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0 \right] U(s)$$

Defini-se a **Função de Transferência** como :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

★ Ordem  $n$ .

★ Causalidade  $\Leftrightarrow n \geq m$  .

★ **Modelo freqüencial** .

**Notação simplificada**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

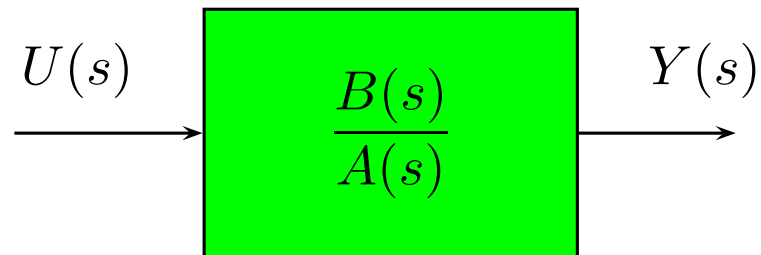
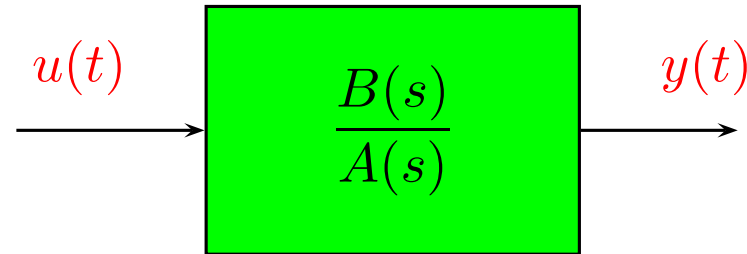


Figura 5: Função de transferência.

**Notação mista**

★ Pode ser encontrada na literatura.

★ A variável  $s$  deve ser interpretada como o operador diferencial  $\frac{d}{dt}$ .

- ★ Função racional em  $s$ .
- ★  $G(s)$  só depende do sistema.
- ★  $G(s)$  só é definida para SLITs.
- ★ O conhecimento de  $G(s)$  permite calcular  $y(t)$  para qualquer sinal  $u(t)$ .
- ★  $G(s)$  pode ser determinada experimentalmente.

**Exemplo 13** Sistema massa-mola-atrito.

EDO que rege a dinâmica do sistema :

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$

Aplicando Laplace :

$$s^2Y + 2sY + 3Y = U$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

**Exemplo 14** Funções de transferência usando MATLAB.

```
>> num = [1];           % polinômio numerador  
>> den = [ 1 2 3 ];     % polinômio denominador  
>>  
>> G = tf(num,den)
```

Transfer function:

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

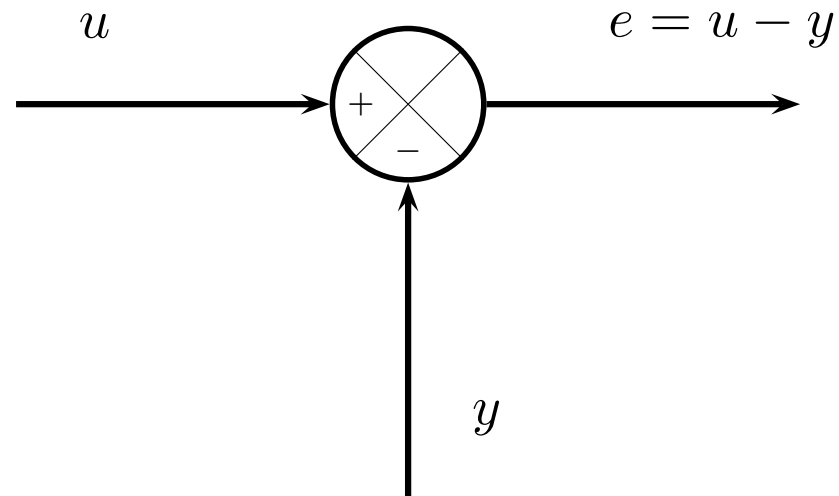
```
>> _
```

## 1.6 Diagramas de blocos

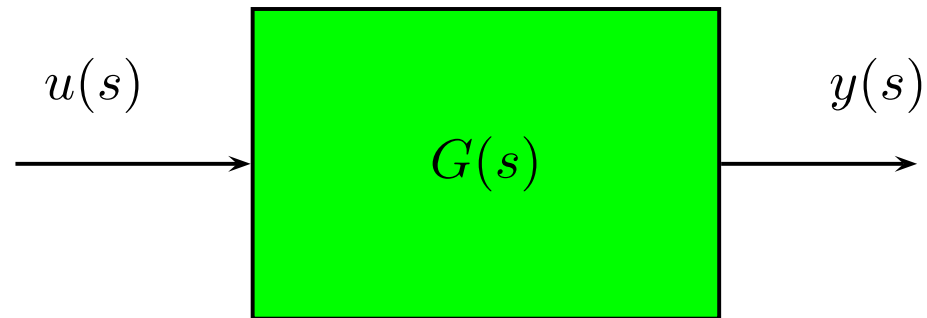
Servem para :

- ★ Visualização de sistemas complexos.
- ★ Visualização de conexões e fluxos de sinais .

**Elementos** :    Setas/sinais  
                     Somadores  
                     Ganhos/FTs

**Somador**

Ganho/FT



**Exemplo 15**

Sistema em malha fechada.

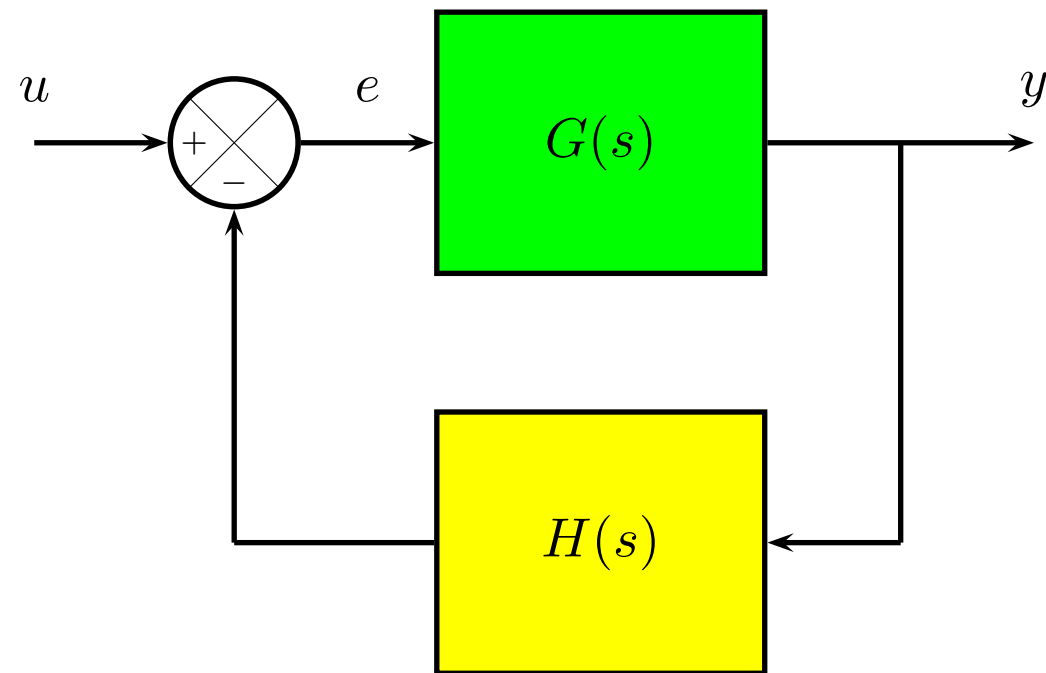


Figura 6: Diagrama de blocos de sistema em malha fechada.

Determinação da **FT em malha fechada** :

Do diagrama tiramos :

$$y = G e$$

$$e = u - H y$$

Eliminando o erro  $e$  :

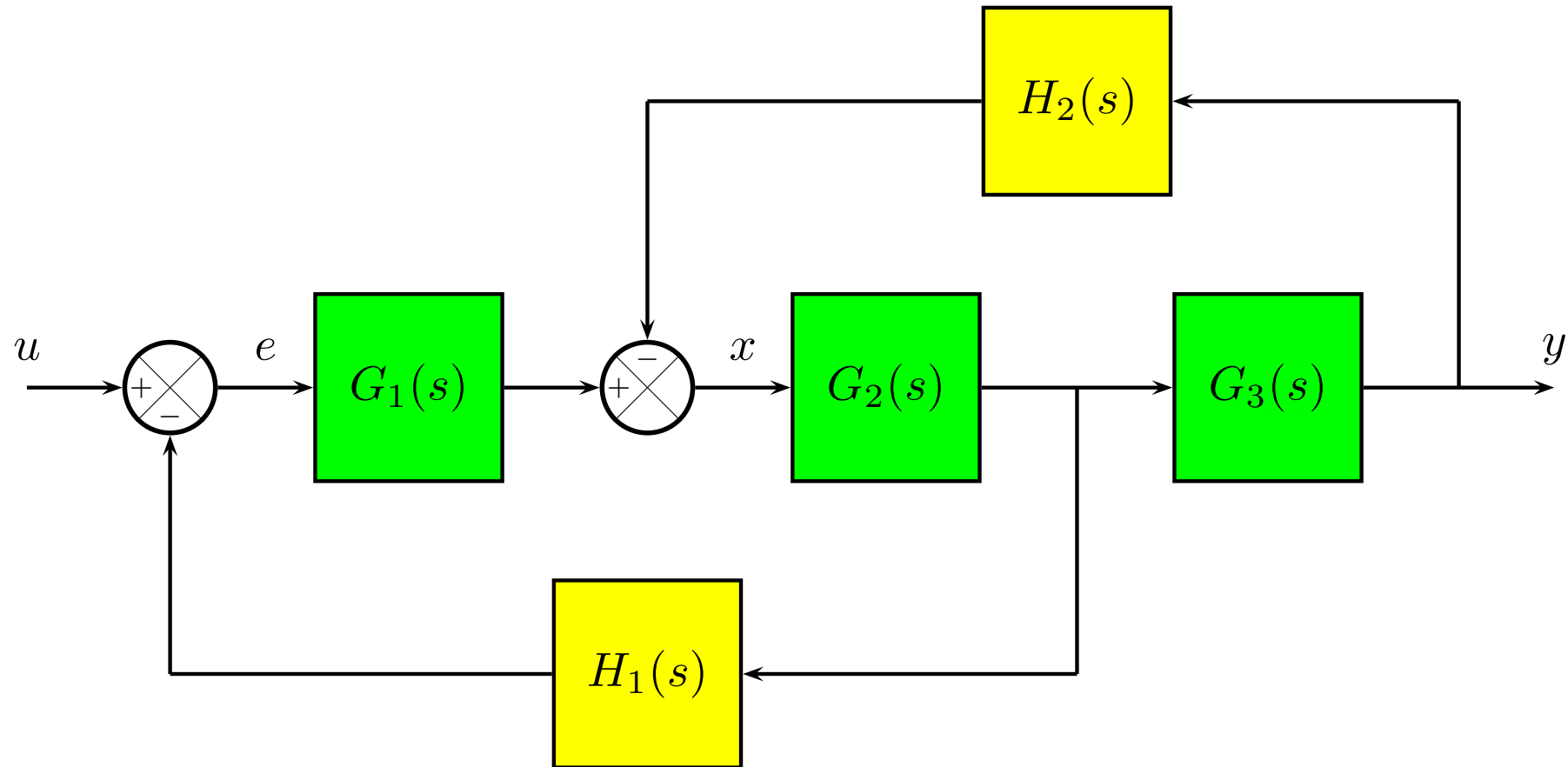
$$\begin{aligned} y &= G(u - H y) \\ &= G u - G H y \end{aligned}$$

Portanto :

$$\left(1 + G H\right) y = G u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G}{1 + G H}}$$

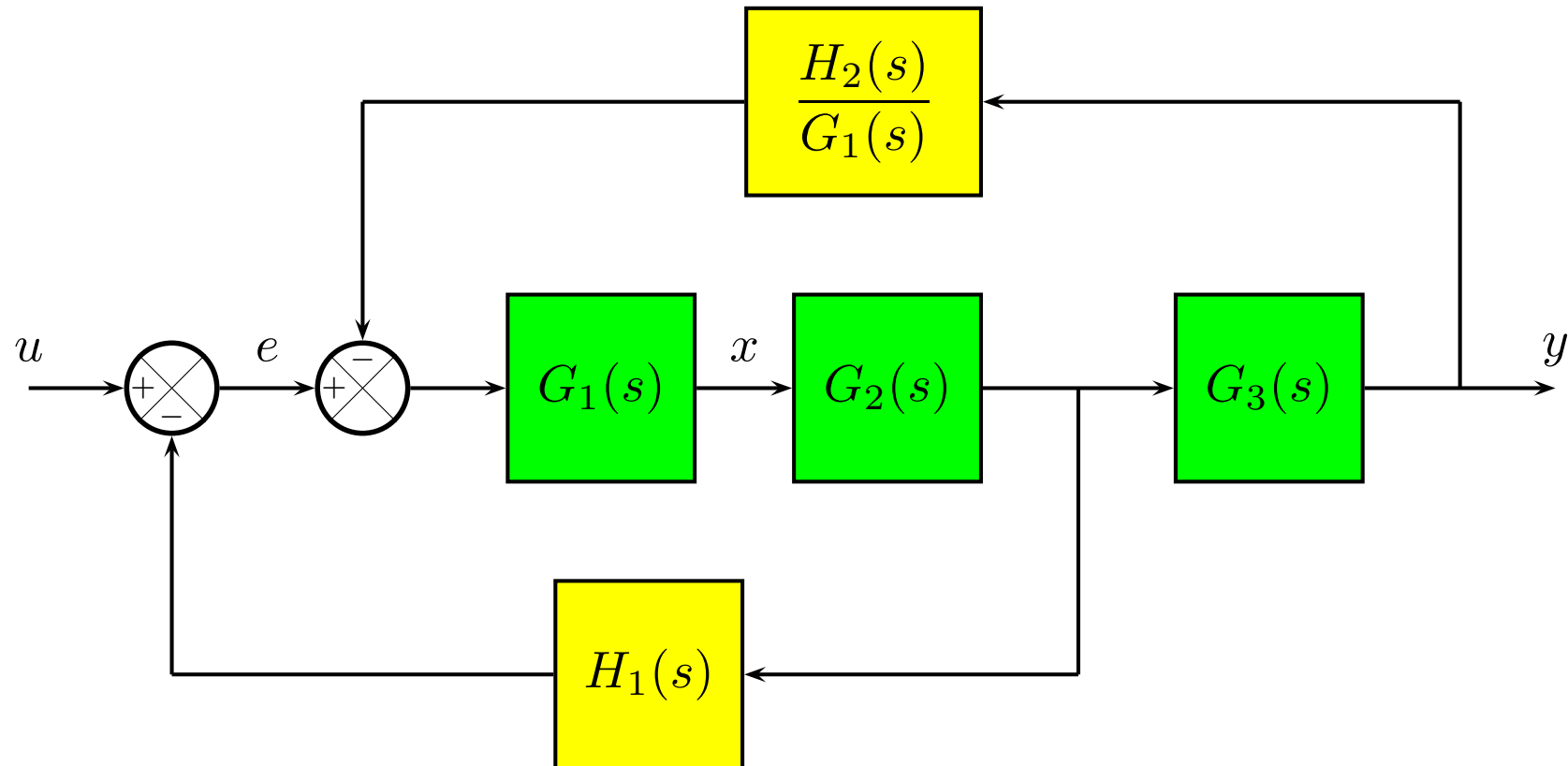
**Exemplo 16**

Sistema em malha fechada.



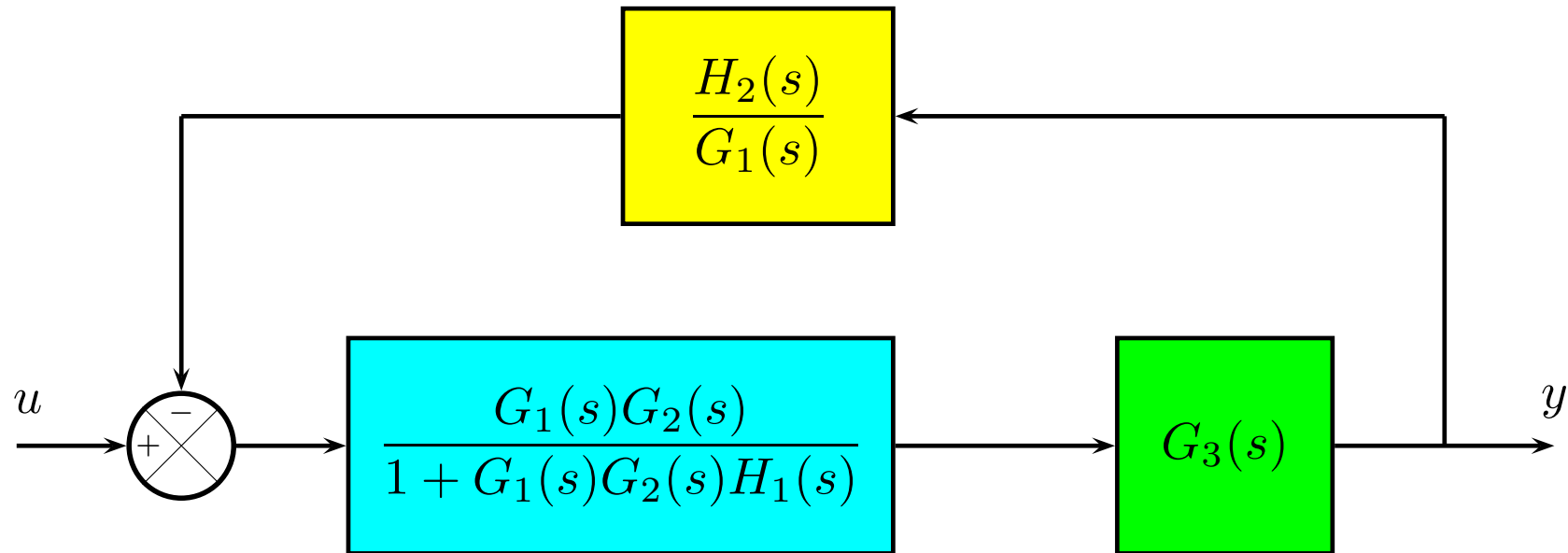
★  $x = G_1 e - H_2 y$

Determinação da **FT em malha fechada** :



★ 
$$x = G_1 \left( e - \frac{H_2}{G_1} y \right)$$

Determinação da **FT em malha fechada** :

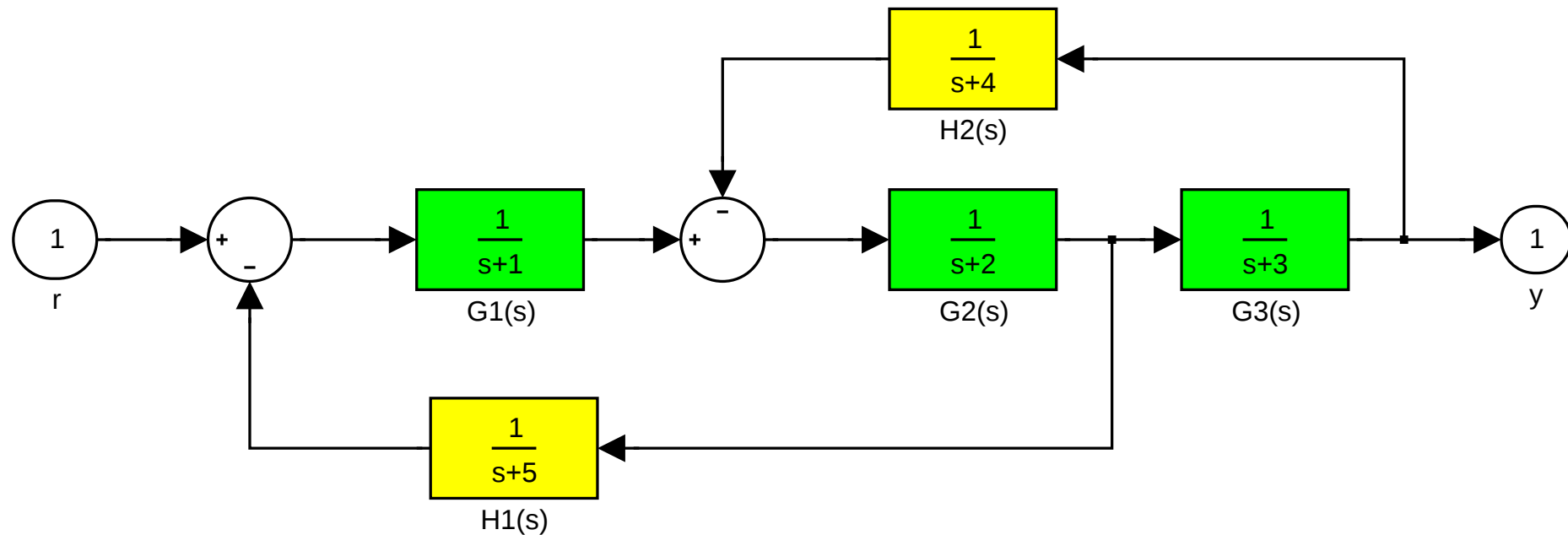


Determinação da **FT em malha fechada** :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s) G_3(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s)}$$

**Exemplo 17**

Usando MATLAB/Simulink.

Figura 7: Diagrama de blocos em Simulink. Model **dblocos.mdl**.

Script para obter a FT em malha fechada ( `diag_blocos.m` ) :

```
% Obtenção de FT de um diagramas de blocos
```

```
open_system('dblocos');
```

```
[A,B,C,D] = linmod('dblocos'); % retorna o modelo de estado
```

```
g = ss(A,B,C,D);
```

```
h = tf(g)
```

```
close_system('dblocos');
```

Resultado :

```
>> diag_blocos
```

Transfer function:

$$s^2 + 9s + 20$$

-----

$$s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 227s^2 + 287s + 137$$

```
>>
```

```
>> _
```

Verificação : Script ( verifica.m )

```
g1 = tf(1,[1 1]);
```

```
g2 = tf(1,[1 2]);
```

```
g3 = tf(1,[1 3]);
```

```
h1 = tf(1,[1 5]);
```

```
h2 = tf(1,[1 4]);
```

```
H = (g1*g2*g3)/(1 + g1*g2*h1 + g2*g3*h2);
```

```
G = minreal(H) % solução após todos os cancelamentos
```

Resultado :

```
>> verifica
```

Transfer function:

$$s^2 + 9s + 20$$

-----

$$s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 227s^2 + 287s + 137$$

```
>> _
```

## 1.7 Equações de estado

### Conteúdo

1. Introdução
2. Exemplo preliminar
3. Condições iniciais
4. Definição
5. Exemplo preliminar 2
6. Diagrama de blocos
7. Exemplos com Matlab/Simulink

## Introdução

**Hipótese:** O aluno está familiarizado com as representações matemáticas

- ★ Resposta ao impulso (já visto em SL-I)
- ★ Equação diferencial ordinária (EDO)
- ★ Função de transferência

**Novidade:** Vamos introduzir a representação de SLIT's por

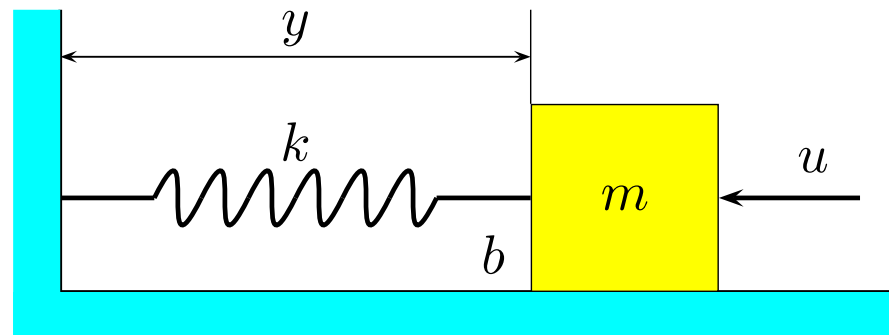
- ★ Variáveis de estado

**Metodologia:** Obtenção da representação de estado a partir da EDO.

## Exemplo preliminar

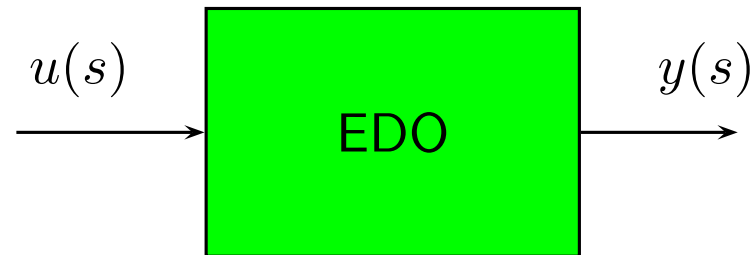
### Exemplo 18

Sistema mecânico tipo massa-mola-atrito.



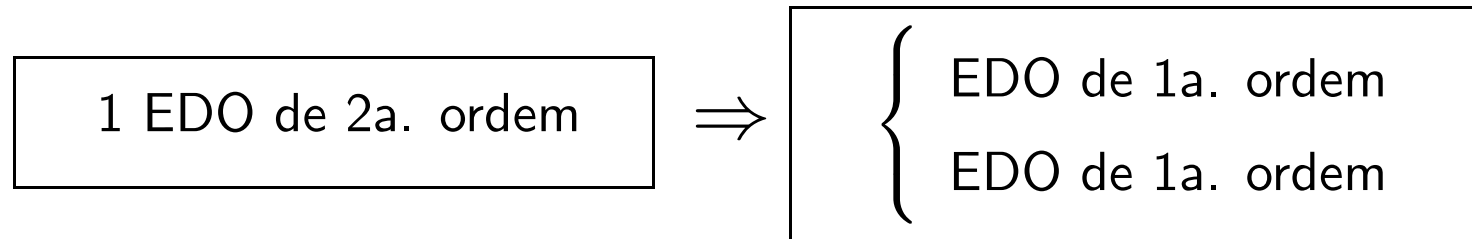
Modelo : EDO de 2a. ordem

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$



Sistema mecânico :  $\ddot{y}$  = aceleração  
 $\dot{y}$  = velocidade e  
 $y$  = posição da massa

Manipulação :



Introduzimos novas variáveis :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Neste caso :  $x_1$  = posição

$x_2$  = velocidade da massa

Derivando-se  $x_1$  e  $x_2$  :

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$= -3y - 2\dot{y} + u$$

$$= -3x_1 - 2x_2 + u$$

Portanto, a EDO de 2a. ordem pode ser reescrita como

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + u$$

$$y = x_1$$

- ★ As equações acima formam uma **representação de estado**.
- ★ As variáveis  **$x_1$  e  $x_2$**  são os estados.

O sistema de equações

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + u$$

$$y = x_1$$

pode ser escrito na **forma matricial**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Introduzindo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

tem-se a forma matricial para a representação de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

**Importante :**

- ★ A representação de estado de um SLIT não é única .
- ★ A escolha das variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$  foi arbitrária.

**Exemplo 19**

Mesmo sistema massa-mola-atrito.

Escolhemos :

$$\tilde{x}_1 = -y$$

$$\tilde{x}_2 = y + \dot{y}$$

Derivando-se  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  :

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\dot{y}$$

$$= y - \tilde{x}_2$$

$$= -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{y} + \ddot{y}$$

$$= \dot{y} + (-3y - 2\dot{y} + u) = -2y - (y + \dot{y}) + u$$

$$= 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + u$$

A representação do sistema passa para

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

**Interpretação.** O estado  $\tilde{x}$  é obtido a partir de uma **transformação linear** de  $x$  :

$$\tilde{x}_1 = -y = -x_1$$

$$\tilde{x}_2 = y + \dot{y} = x_1 + x_2$$

Usando notação matricial, tem-se

$$\tilde{x} = Tx = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x .$$

## Condições iniciais

A solução da EDO

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$

requer o conhecimento das **condições iniciais**  $y(t_0)$  e  $\dot{y}(t_0)$ .

Para a solução das equações de estado (em  $x$ ) é necessário o conhecimento de

$$x_1(t_0) = y(t_0)$$

$$x_2(t_0) = \dot{y}(t_0)$$

Para a representação equivalente (em  $\tilde{x}$ ), a condição inicial é

$$\tilde{x}_1(t_0) = -y(t_0)$$

$$\tilde{x}_2(t_0) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)$$

## Definição

### Definição. *(Estado)*

O **estado** em  $t = t_0$  de um sistema de ordem  $n$  é o conjunto de  $n$  valores  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ , que juntamente com o sinal de entrada para  $t \geq t_0$ , é suficiente para determinar todo o comportamento do sistema para  $t \geq t_0$ .

## Exemplo preliminar 2

**Exemplo 20** Vamos considerar agora um SLIT descrito por

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = \dot{u} + u$$

★  $\dot{u}$  não deve aparecer na representação de estado

Escolhemos as seguintes variáveis :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} - u \quad (!!)$$

★ Essas variáveis podem não ter significado físico.

Derivando-se  $x_1$  e  $x_2$ , obtemos

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - \dot{u}$$

$$= -3y - 2\dot{y} + u$$

$$= -3x_1 - 2(x_2 + u) + u$$

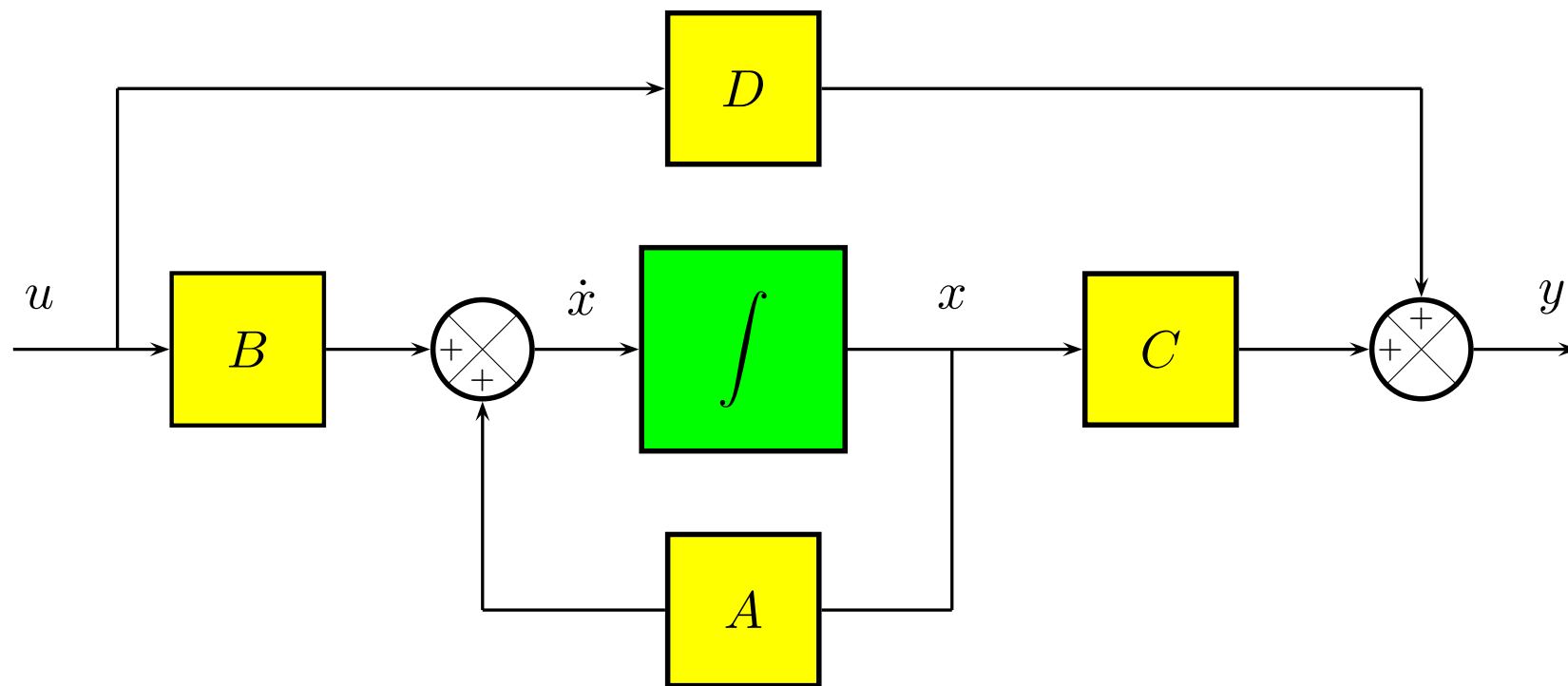
★  $x_2$  foi escolhida de modo que  $\dot{x}_2 = \ddot{y} - \dot{u} \Rightarrow$  elimina  $\dot{u}$ .

Resultado :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

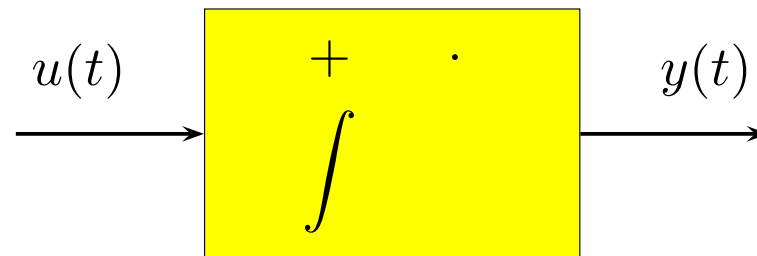
## Diagrama de blocos

Representação de estado : 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



**Observações :**

- ★ O diagrama de blocos utiliza somente as operações permitidas.



## Exemplos com Matlab/Simulink

### Exemplo 21

Equações de estado usando MATLAB/Simulink.

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

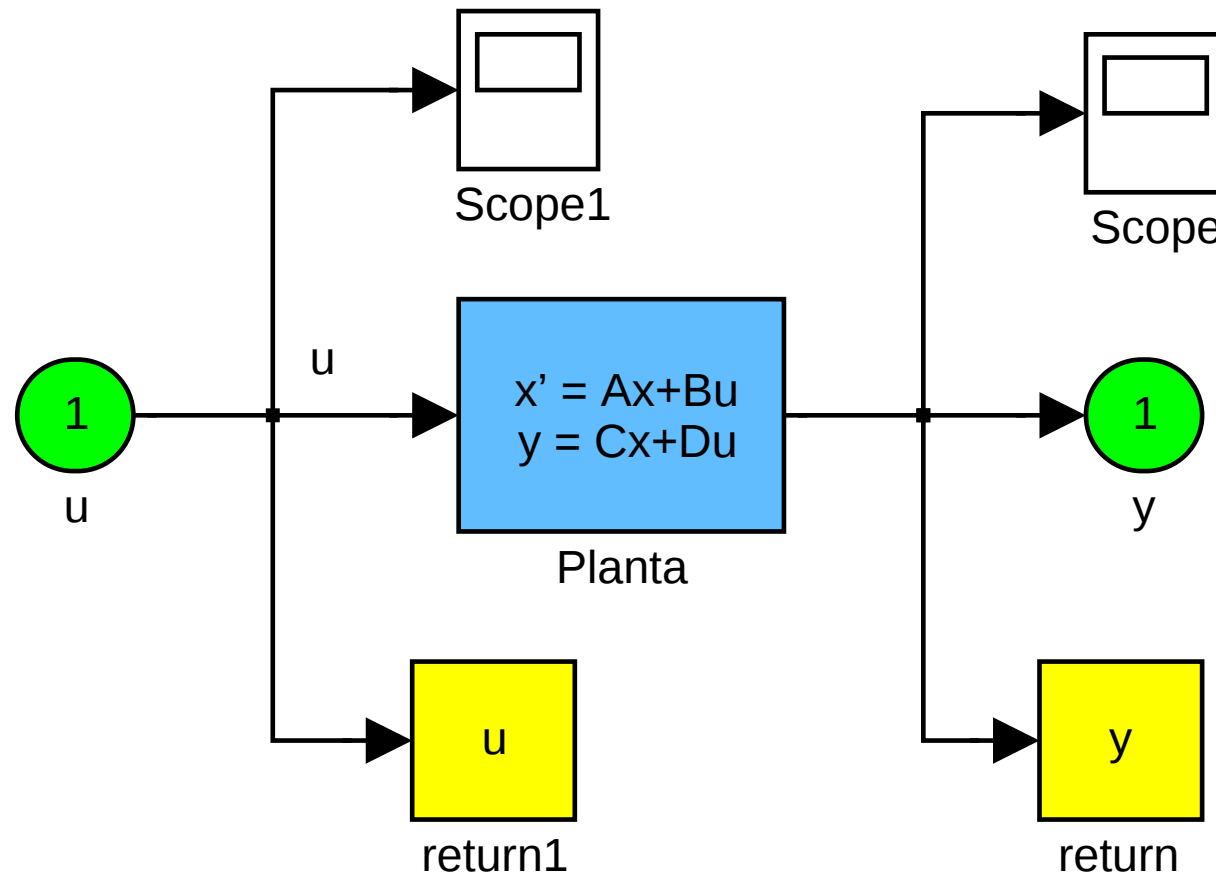


Figura 8: Diagrama de blocos em Simulink. Model **modelo.mdl**.

Script **simu1.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [ 1 0];
```

```
D = 0;
```

```
x0 = [1 0]; % condição inicial
```

```
tfinal = 8;
```

```
sim('modelo',tfinal)
```

```
plot(y,'Linew',2.5); grid on; shg
```

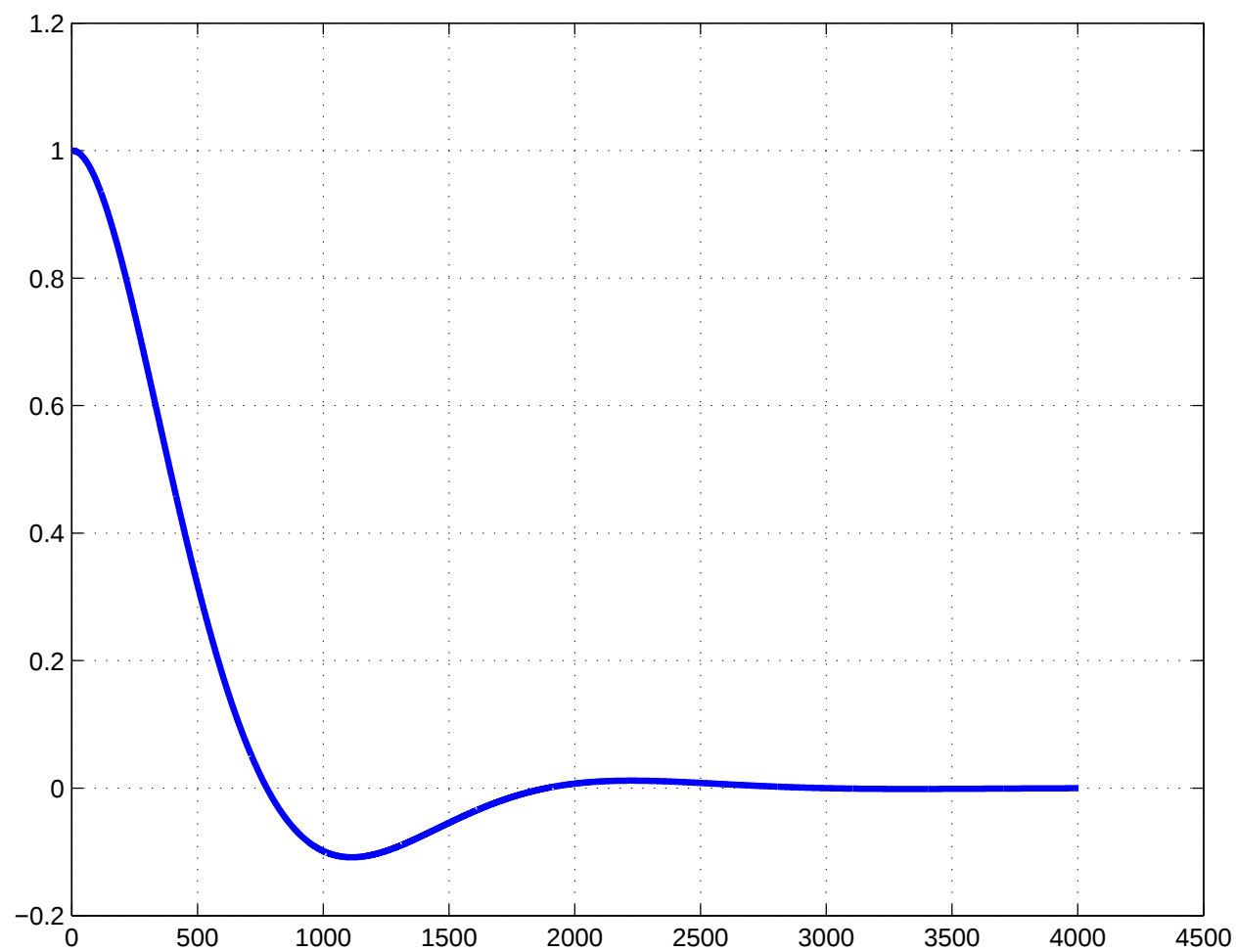
**Resultado**

Figura 9: Resposta à condição inicial. Script **simu1.m**.

Script **simu2.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [-1 -1; 2 -1]; % matrizes do sistema transformado
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [-1 0];
```

```
D = 0;
```

```
x0 = [-1 1]; % condição inicial
```

```
tfinal = 8;
```

```
sim('modelo',tfinal)
```

```
plot(y,'Linew',2.5); grid on; shg
```

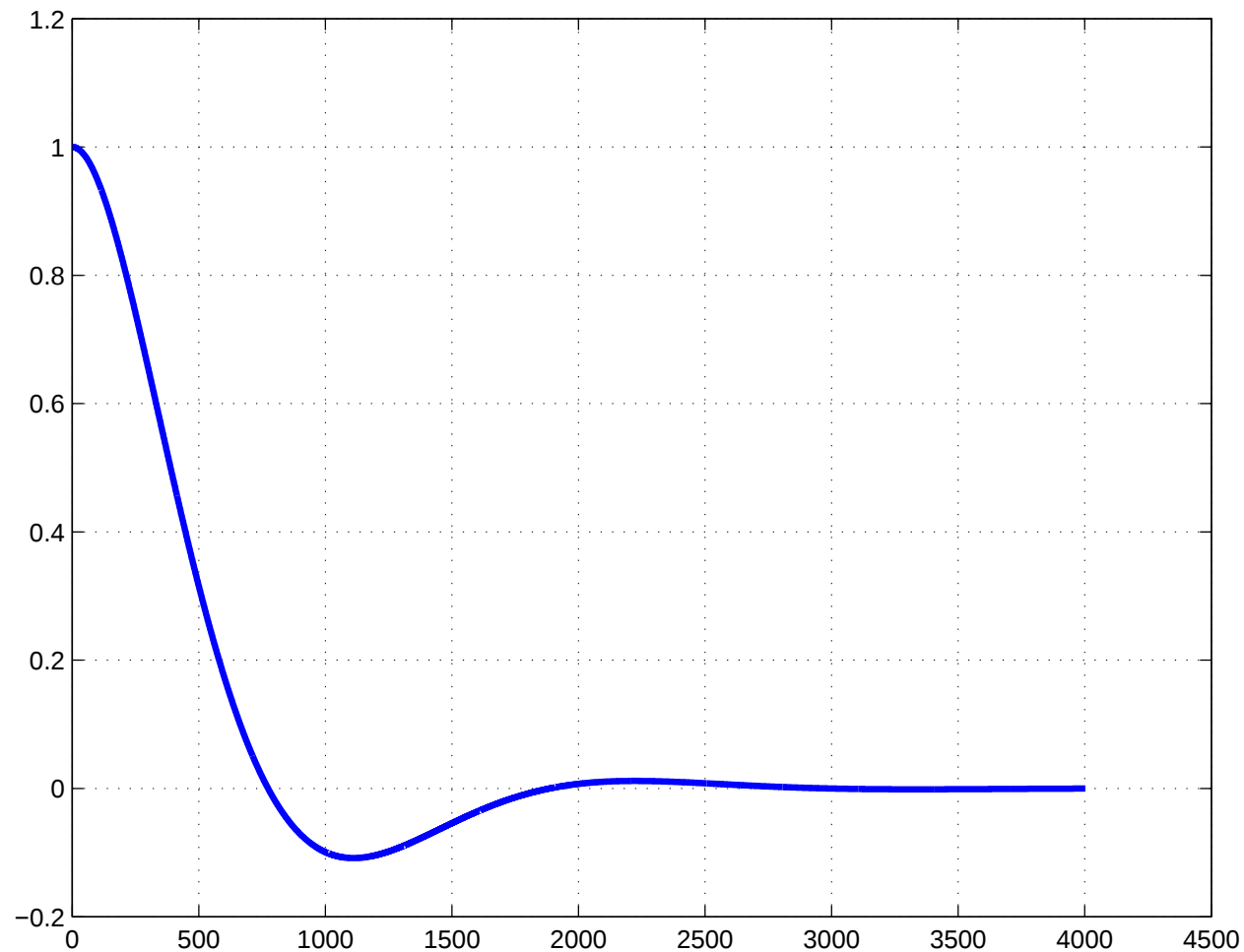
**Resultado**

Figura 10: Resposta à condição inicial. Script **simu2.m**.

**Exemplo 22**

Equações de estado usando MATLAB/Simulink.

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

★ Simulação alternativa do mesmo sistema utilizando bloco integrador.

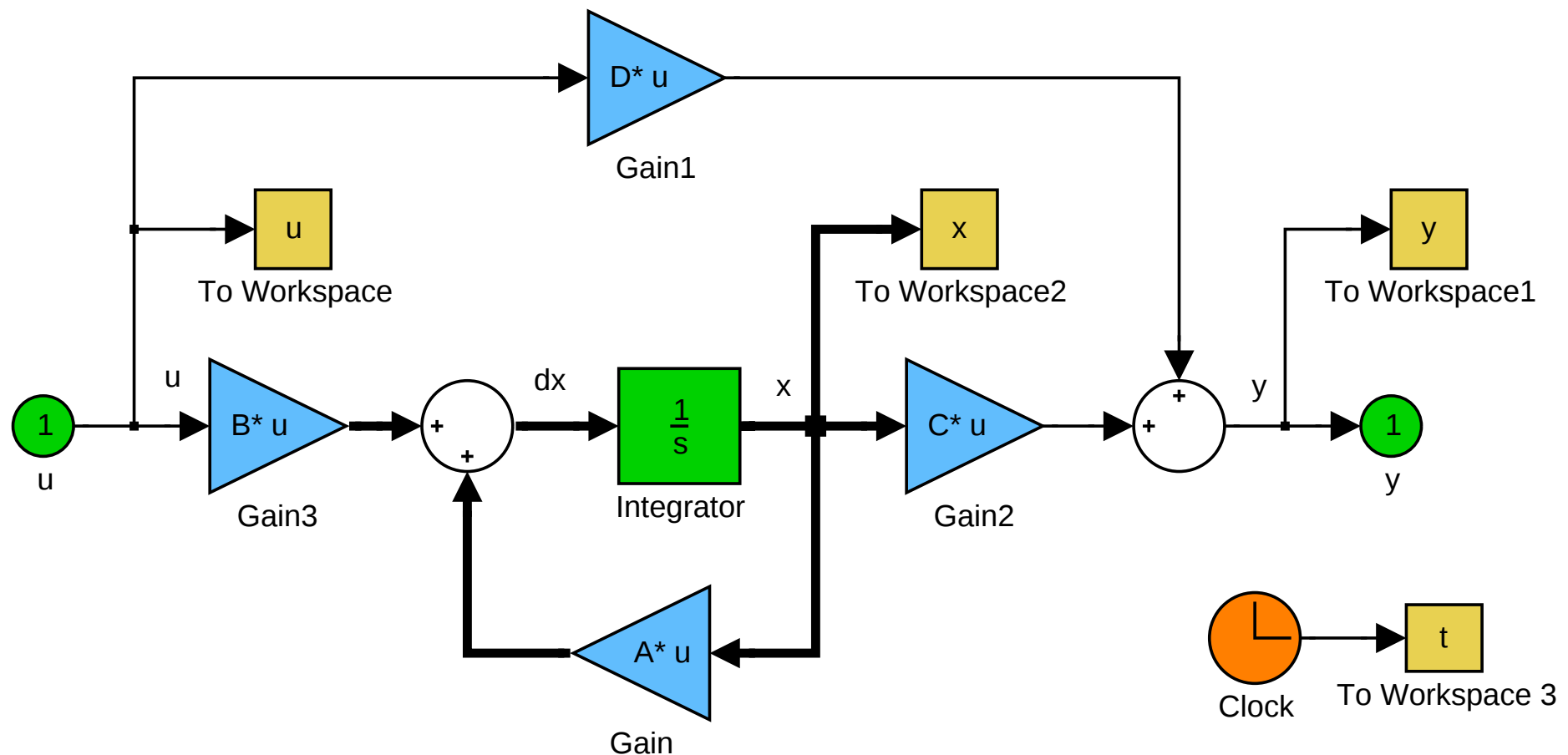


Figura 11: Diagrama de blocos em Simulink. Model **modelo1.mdl**.

★ Note a utilização do bloco **Clock** para obter a variável tempo.

## Vantagens :

- ★ Maior controle sobre a integração numérica.
- ★ Acesso ao estado.

Script **simu3.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [ 1 0];
```

```
x0 = [1 0]; % condição inicial
```

```
open_system('modelo1');
```

```
set_param('modelo1','MaxStep','0.01')
```

```
tfinal = 10;
```

```
sim('modelo1',tfinal)
```

```
plot(t,x,'Linew',2.5); grid on; shg
```

```
close_system('modelo1');
```

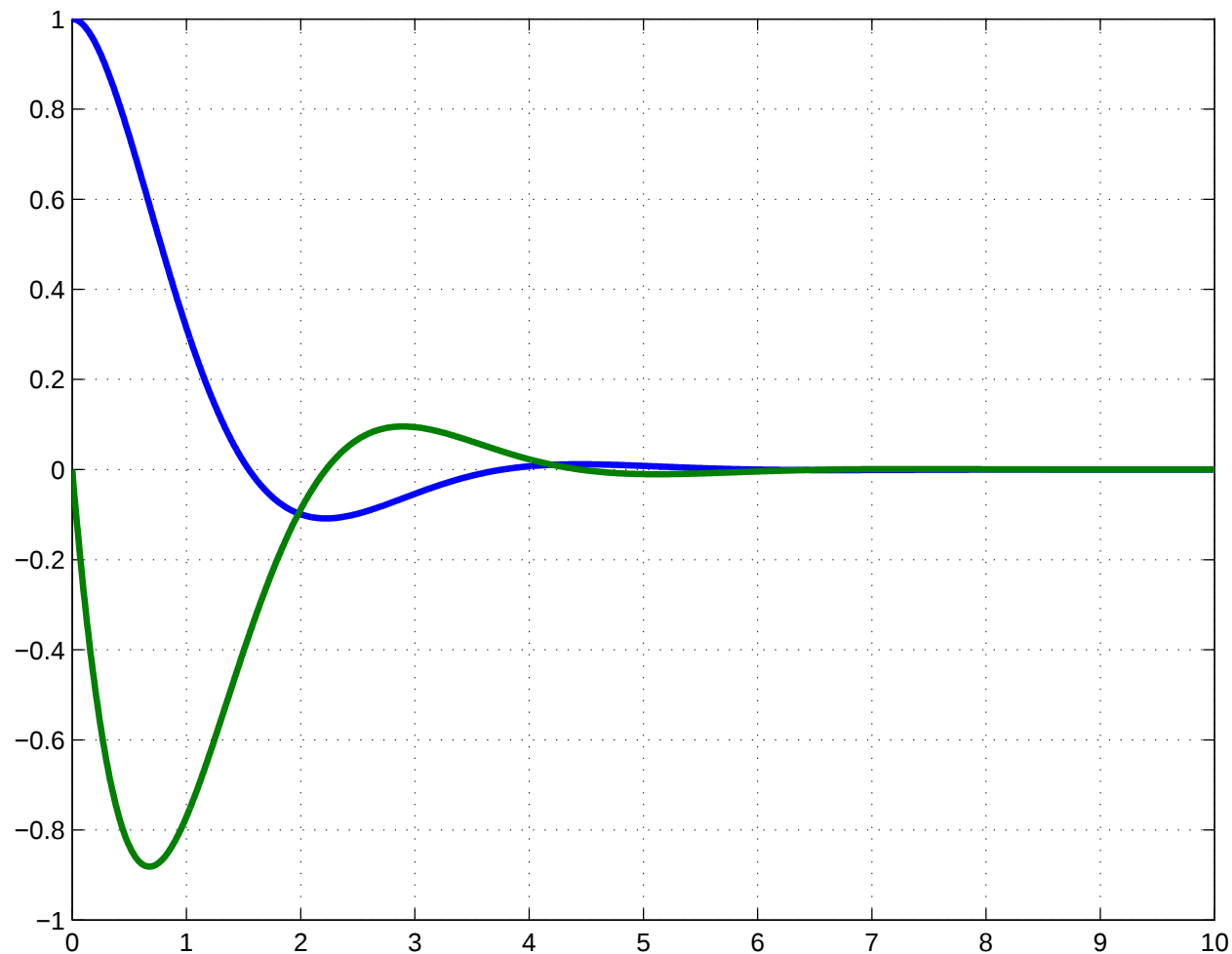
**Resultado**

Figura 12: Resposta à condição inicial. Script **simu3.m**.

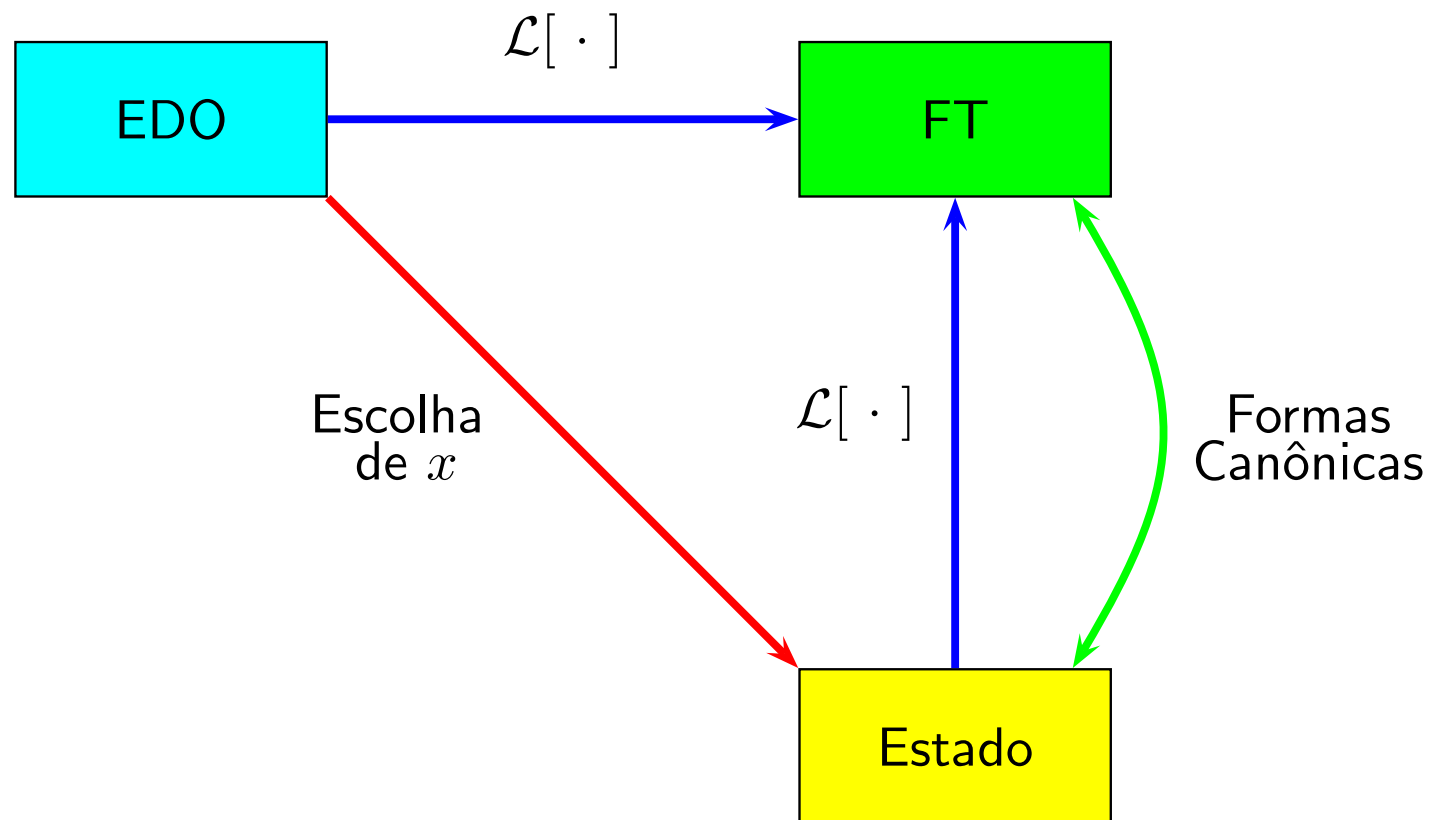
**Importante :**

- ★ Para SLITs de ordem elevada o procedimento descrito pode resultar bastante trabalhoso.
- ★ Método sistemático : utilização de formas canônicas .

**Próximo passo :**

- ★ Vamos determinar a Função de Transferência de um SLIT dado por uma representação de estado.

## Resumo da metodologia



## 1.8 Realização de funções de transferência

### Conteúdo

1. Função de transferência (FT)
2. Formas canônicas
  - Forma canônica controlável
  - Forma canônica observável
3. Transformação de coordenadas
4. Exemplos
5. Exercícios

## Função de transferência (FT)

Considere novamente a representação de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Estamos interessados em determinar a FT

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Aplicando Transformada de Laplace :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Portanto,

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

A FT procurada é :

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

**Exemplo 23** Seja o modelo de estado (vide [Exemplo preliminar 2](#))

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente a esse sistema é

$$g(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Lembrete.** Inversa de uma matriz  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Cálculos :

$$\begin{aligned} g(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+1}{s^2 + 2s + 3} \end{aligned}$$

**Exemplo 24** Usando Matlab.

Considere o mesmo sistema do exemplo anterior :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Script `calcula_ft.m`

```
% Determinação de função de transferência
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
s1 = ss(A,B,C,D) % cria o sistema s1 (representação de estado)
```

```
g = tf(s1) % determina a Função de Transferência de s1
```

**Resultado**

```
>> calcula_ft
```

```
Transfer function:
```

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

```
>>
```

**Exemplo 25** Usando Matlab/symbolic.

Ainda utilizando o mesmo sistema :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Script `calcula_ft_sym.m`

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [1; -1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
syms s;      % cria variáveis simbólicas
```

```
I = eye(2); % cria matriz identidade
```

```
g = C*inv(s*I - A)*B + D; % calcula a Função de Transferência
```

```
g = simple(g);           % determina a forma mais simples
```

```
g
```

**Resultado**

```
>> calcula_ft_sym
```

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

```
>>
```

## Formas canônicas

★ Úteis para a obtenção de uma representação de estado de um SLIT.

Neste contexto, duas formas canônicas são de particular interesse:

1. Forma canônica controlável (FC Co)
2. Forma canônica observável (FC Ob)

**Forma canônica controlável**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

## Forma canônica controlável (forma compacta)

$$\dot{x} = \left[ \begin{array}{c|cccc} \mathbf{0} & & & & \\ \hline & \mathbf{I} & & & \\ & & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 1 \end{array} \right] u$$

$$y = \left[ b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} \right] x$$

**Forma canônica observável**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x$$

# Forma canônica observável (forma compacta)

$$\dot{x} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \\ -a_0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} \end{matrix} \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \end{array} \right] x$$

**Exemplo 26** Seja o seguinte SLIT de 2a. ordem na **FC Co**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente é dada por

$$g(s) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculos :

$$\begin{aligned} g(s) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

**Propriedade :**

- ★ Os coeficientes  $b_i$  e  $a_i$  são os mesmos que aparecem no numerador e denominador da FT.
- ★ Para se obter uma representação de estado a partir de uma FT, basta o conhecimento desses coeficientes.
- ★ A FC Ob também tem essa propriedade.

**Exemplo 27** Seja o seguinte SLIT de 2a. ordem na **FC Ob**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente é dada por

$$g(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Cálculos :

$$\begin{aligned} g(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

**Exemplo 28** Encontrar um modelo de estado para o SLIT de 3a. ordem

$$g(s) = \frac{2s^2 + 4s + 7}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Representação na FC Co :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Representação na FC Ob :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

## Transformação de coordenadas

Considere o modelo de estado :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- ★ Podemos definir estados  $z_i$  a partir de uma combinação linear dos estados  $x_i$ .
- ★ A combinação linear pode ser representada na forma matricial

$$z = Tx$$

onde  $T$  é uma matriz não singular .

## Representação de estado correspondente

Multiplicando a 1a. equação por  $T$  :

$$T\dot{x} = TAx + TBu$$

Porém,

$$\dot{z} = T\dot{x}$$

$$x = T^{-1}z$$

Eliminando a variável  $x$ , tem-se

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$$

$$y = CT^{-1}z + Du$$

Após definir as matrizes

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

$$\tilde{B} = TB$$

$$\tilde{C} = CT^{-1}$$

$$\tilde{D} = D$$

obtemos a seguinte representação do sistema com estado  $z$

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}z + \tilde{D}u$$

## 1.9 Modelagem de sistemas dinâmicos lineares

### Conteúdo

1. Método: Analogia força–corrente
2. Modelos de sistemas mecânicos de translação
3. Modelos de sistemas mecânicos de rotação
4. Modelos de sistemas elétricos
5. Modelos de sistemas fluidos
6. Modelos de sistemas térmicos

## Método: Analogia força–corrente

- ★ Método sistemático para obtenção das equações de estado.

**Potência**

| Sistema                | Potência       |
|------------------------|----------------|
| Mecânico de translação | $P = F v$      |
| Mecânico de rotação    | $P = T \omega$ |
| Elétrico               | $P = i v$      |
| Fluido                 | $P = q p$      |
| Térmico                | —              |

$$P = \text{variável seqüenciada} \times \text{variável referenciada}$$

- ★ Característica da **variável seqüenciada** : o sensor deve ser instalado em série.
- ★ Característica da **variável referenciada** : em todos os sistemas, é medida em relação a alguma referência.

**Elementos**

| Sistema            | Resistência | Indutância        | Capacitância         |
|--------------------|-------------|-------------------|----------------------|
| Mec. de translação | Atrito      | Mola              | Massa                |
| Mec. de rotação    | Atrito      | Mola torsional    | Inércia              |
| Fluido             | Restrição   | Inertância fluida | Capacitância fluida  |
| Térmico            | Isolamento  | —                 | Capacitância térmica |

## Modelos de sistemas mecânicos de translação

Variável seqüenciada : Força  $\left[ F \right]$

Variável referenciada : Velocidade  $\left[ v \right]$

Variáveis integradas :

$$\Gamma = \int_0^t F d\tau + \Gamma(0)$$

Quantidade de movimento

$$x = \int_0^t v d\tau + x(0)$$

Deslocamento linear

**Relações elementares :**

Massa :

$$m \frac{dv_m}{dt} = F_m$$

Mola :

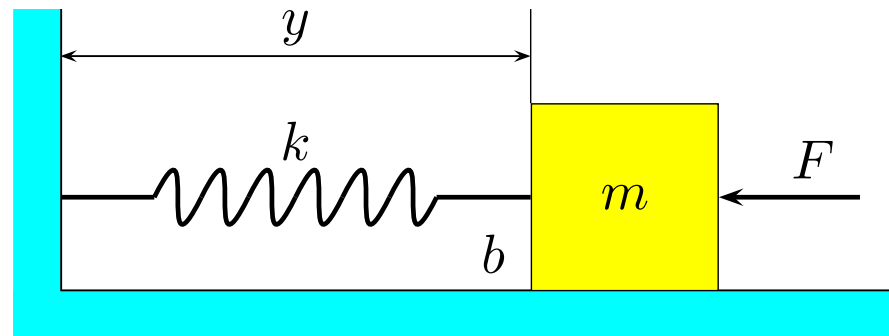
$$k v_k = \frac{dF_k}{dt}$$

Atrito :

$$b v_b = F_b$$

**Exemplo 29** Sistema mecânico de translação

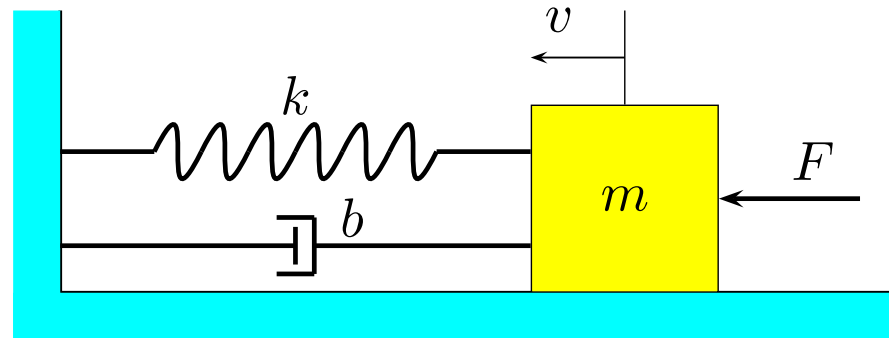
Vamos começar utilizando nosso velho conhecido, sistema massa-mola-atrito



Sinal de entrada :  $F$  (Força)

Sinal de saída :  $y$  (Posição da massa  $m$  em relação a um referencial inercial)

## Representação alternativa



**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 2$$

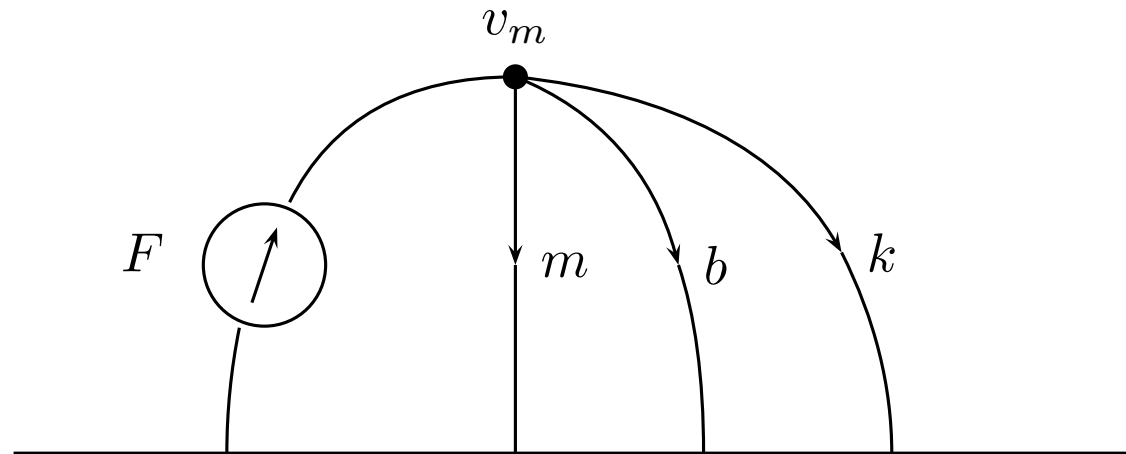
**Grafo**

Figura 13: Grafo orientado.

★ As orientações são adotadas arbitrariamente.

## Equações do grafo

Equações dos Nós :  $F_m + F_b + F_k = F$

Equações das Malhas :  $v_m = v_b = v_k$

## Obtenção da EDO

Substituindo as relações elementares na equação dos nós :

$$m \frac{dv_m}{dt} + b v_b + k \int_0^t v_k d\tau = F$$

Utilizando as equações das malhas :

$$m \frac{dv_m}{dt} + b v_m + k \int_0^t v_m d\tau = F$$

Utilizando a definição de deslocamento  $y$  (variável integrada), temos :

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = F$$

## Obtenção da equação de estado

Passo 1 : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = v_m$$

(Velocidade da massa)

$$x_2 = F_k$$

(Força na mola)

Passo 2 : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

Para a massa escrevemos :

$$\begin{aligned} m \frac{dv_m}{dt} &= F_m & (\text{Nós : } F_m + F_b + F_k &= F) \\ &= -F_b - F_k + F & (\text{Atrito : } F_b &= b v_b) \\ &= -b v_b - F_k + F & (\text{Malhas : } v_m = v_b = v_k) \\ &= -b v_m - F_k + F \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  :

$$m \dot{x}_1 = -b x_1 - x_2 + F$$

Portanto :

$$\dot{x}_1 = -\frac{b}{m} x_1 - \frac{1}{m} x_2 + \frac{1}{m} F$$

Para a **mola** escrevemos :

$$\begin{aligned}\frac{dF_k}{dt} &= k v_k \\ &= k v_m\end{aligned}\quad (\text{Malhas : } v_m = v_b = v_k)$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_1$  e  $x_2$  :

$$\dot{x}_2 = k x_1$$

## Equação de saída

Sinal de saída :  $y$  (Posição da massa  $m$  em relação a um referencial inercial)

Utilizando a equação para a mola :

$$\begin{aligned} F_k &= k \int_0^t v_k d\tau \\ &= k \int_0^t v_m d\tau \\ &= k(y(t) - y(0)) = k y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{k} F_k \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{k} x_2$$

Resultado :

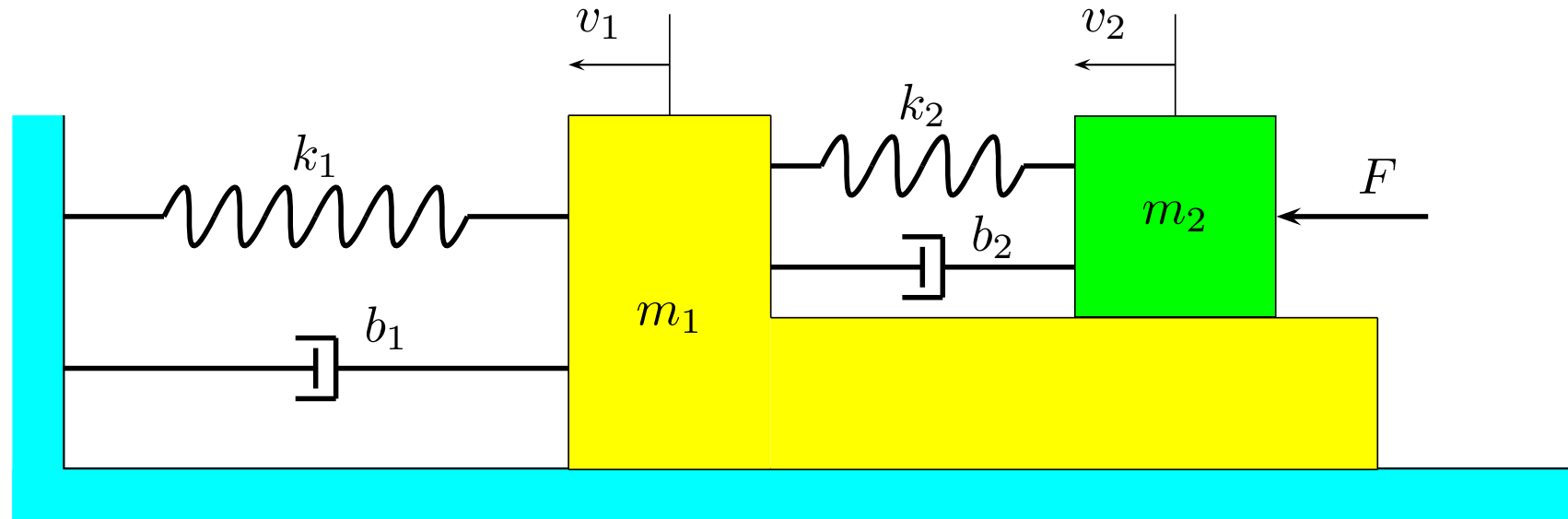
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{b}{m} x_1 - \frac{1}{m} x_2 + \frac{1}{m} F \\ \dot{x}_2 = k x_1 \\ y = \frac{1}{k} x_2 \end{cases}$$

Usando notação matricial :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{1}{m} \\ k & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

**Exemplo 30**

## Sistema mecânico de translação



Sinal de entrada :  $F$  (Força)

Sinal de saída :  $y_1$  (Posição da massa  $m_1$ )

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 4$$

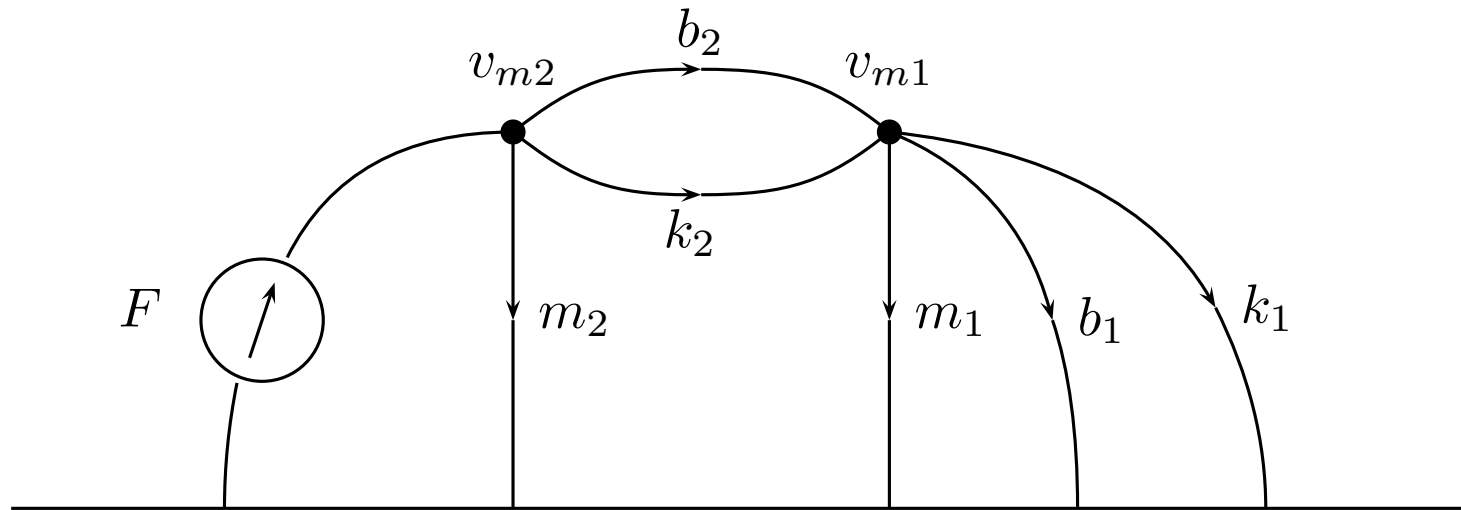
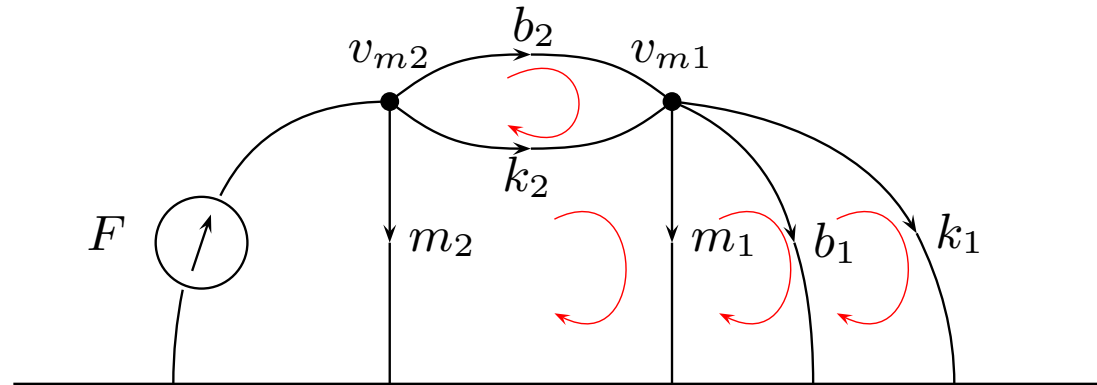
**Grafo**

Figura 14: Grafo orientado.



**Equações dos Nós :**  $F_{m2} + F_{b2} + F_{k2} = F$

$$F_{k2} + F_{b2} = F_{m1} + F_{b1} + F_{k1}$$

**Equações das Malhas :**  $v_{k2} = v_{b2}$

$$v_{k2} + v_{m1} - v_{m2} = 0$$

$$v_{m1} = v_{b1} = v_{k1}$$

## Obtenção da equação de estado

**Passo 1** : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = v_{m1}$$

(Velocidade da massa 1)

$$x_2 = v_{m2}$$

(Velocidade da massa 2)

$$x_3 = F_{k1}$$

(Força na mola 1)

$$x_4 = F_{k2}$$

(Força na mola 2)

**Passo 2** : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

Para a **massa 1** escrevemos :

$$m_1 \frac{dv_{m1}}{dt} = F_{m1} \quad (\text{equações dos Nós})$$

$$= F_{k2} + F_{b2} - F_{b1} - F_{k1} \quad (\text{equações dos atrito})$$

$$= F_{k2} + b_2 v_{b2} - b_1 v_{b1} - F_{k1} \quad (\text{equações das Malhas})$$

$$= F_{k2} + b_2 (-v_{m1} + v_{m2}) - b_1 v_{m1} - F_{k1}$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_i$  :

$$m_1 \dot{x}_1 = x_4 + b_2 (-x_1 + x_2) - b_1 x_1 - x_3$$

Portanto :

$$\dot{x}_1 = -\frac{b_1 + b_2}{m_1} x_1 + \frac{b_2}{m_1} x_2 - \frac{1}{m_1} x_3 + \frac{1}{m_1} x_4$$

Para a massa 2 escrevemos :

$$\begin{aligned} m_2 \frac{dv_{m2}}{dt} &= F_{m2} && \text{(equações dos Nós)} \\ &= -F_{b2} - F_{k2} + F && \text{(equações dos atrito)} \\ &= -b_2 v_{b2} - F_{k2} + F && \text{(equações das Malhas)} \\ &= -b_2 (-v_{m1} + v_{m2}) - F_{k2} + F \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis  $x_i$  :

$$m_2 \dot{x}_2 = b_2 x_1 - b_2 x_2 - x_4 + F$$

Portanto :

$$\dot{x}_2 = \frac{b_2}{m_2} x_1 - \frac{b_2}{m_2} x_2 - \frac{1}{m_2} x_4 + \frac{1}{m_2} F$$

Para a **mola 1** escrevemos :

$$\begin{aligned}\frac{dF_{k1}}{dt} &= k_1 v_{k1} \\ &= k_1 v_{m1}\end{aligned}\quad (\text{equações das Malhas})$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_i$  :

$$\dot{x}_3 = k_1 x_1$$

Para a **mola 2** escrevemos :

$$\begin{aligned}\frac{dF_{k2}}{dt} &= k_2 v_{k2} && \text{(equações das Malhas)} \\ &= k_2 (-v_{m1} + v_{m2})\end{aligned}$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_i$  :

$$\dot{x}_4 = -k_2 x_1 + k_2 x_2$$

## Equação de saída

Sinal de saída :  $y = y_1$  (Posição da massa  $m_1$ )

Utilizando a equação para a mola 1 :

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1 \int_0^t v_{k1} d\tau \\ &= k_1 \int_0^t v_{m1} d\tau \\ &= k_1 (y_1(t) - y_1(0)) = k_1 y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{k_1} F_{k1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = y_1 = \frac{1}{k_1} x_3$$

Resultado :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{b_1 + b_2}{m_1} x_1 + \frac{b_2}{m_1} x_2 - \frac{1}{m_1} x_3 + \frac{1}{m_1} x_4 \\ \dot{x}_2 = \frac{b_2}{m_2} x_1 - \frac{b_2}{m_2} x_2 - \frac{1}{m_2} x_4 + \frac{1}{m_2} F \\ \dot{x}_3 = k_1 x_1 \\ \dot{x}_4 = -k_2 x_1 + k_2 x_2 \\ y = \frac{1}{k_1} x_3 \end{array} \right.$$

Usando notação matricial :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} & -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} & 0 & -\frac{1}{m_2} \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{k_1} & 0 \end{bmatrix} x$$

## Modelos de sistemas mecânicos de rotação

Variável seqüenciada : Torque  $\left[ T \right]$

Variável referenciada : Velocidade angular  $\left[ \omega \right]$

Variáveis integradas :

$$h = \int_0^t T d\tau + h(0)$$

Quantidade de movimento angular

$$\theta = \int_0^t \omega d\tau + \theta(0)$$

Deslocamento angular

**Relações elementares :**

Inércia

:

$$J \frac{d\omega_J}{dt} = T_J$$

Mola torsional :

$$k \omega_k = \frac{dT_k}{dt}$$

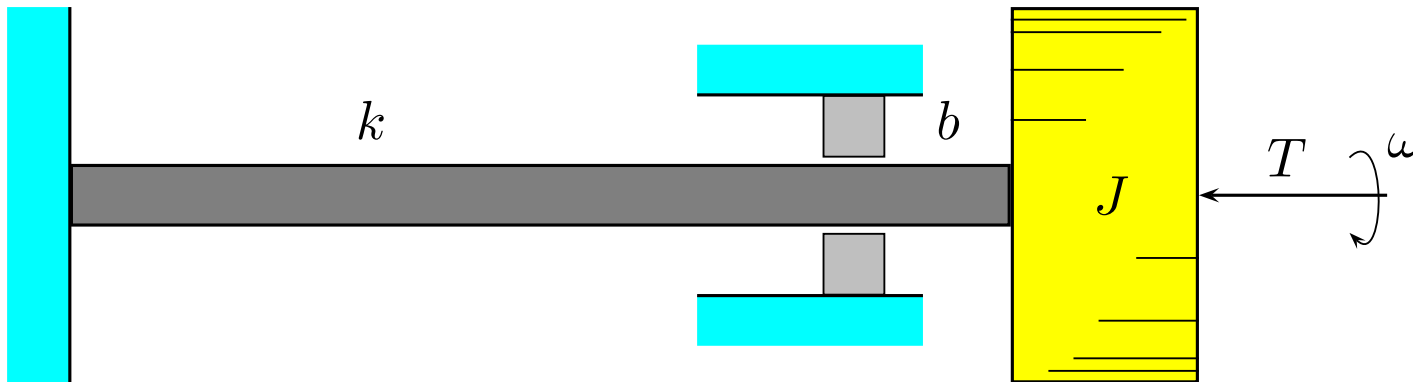
Atrito

:

$$b \omega_b = T_b$$

**Exemplo 31**

## Sistema mecânico de rotação



Sinal de entrada :  $T$  (Torque)

Sinal de saída :  $y = \theta_J$  (Posição angular da inércia  $J$ )

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 2$$

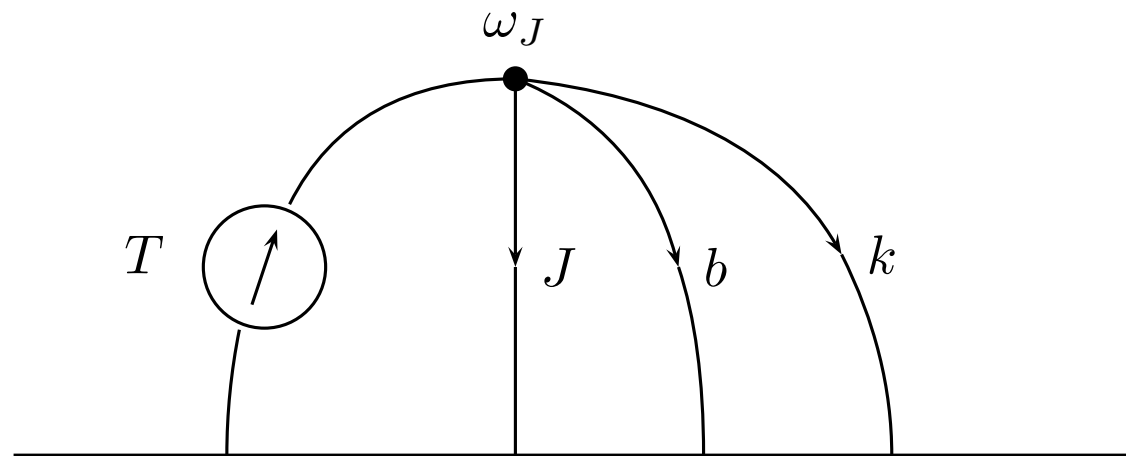
**Grafo**

Figura 15: Grafo orientado.

## Equações do grafo

Equações dos Nós :  $T_m + T_b + T_k = T$

Equações das Malhas :  $\omega_m = \omega_b = \omega_k$

## Obtenção da equação de estado

Passo 1 : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = \omega_J$$

(Velocidade angular da inércia)

$$x_2 = T_k$$

(Torque na mola)

Passo 2 : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

Para a **inércia** escrevemos :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega_J}{dt} &= T_J & (\text{Nós : } T_J + T_b + T_k &= T) \\ &= -T_b - T_k + T & (\text{Atrito : } T_b &= b \omega_b) \\ &= -b \omega_b - T_k + T & (\text{Malhas : } \omega_J = \omega_b = \omega_k) \\ &= -b \omega_J - T_k + T \end{aligned}$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_1$  e  $x_2$  :

$$J \dot{x}_1 = -b x_1 - x_2 + T$$

Portanto :

$$\dot{x}_1 = -\frac{b}{J} x_1 - \frac{1}{J} x_2 + \frac{1}{J} T$$

Para a **mola torsional** escrevemos :

$$\begin{aligned}\frac{dT_k}{dt} &= k \omega_k \\ &= k \omega_J\end{aligned}\quad (\text{Malhas : } \omega_J = \omega_b = \omega_k)$$

Introduzindo as **variáveis**  $x_1$  e  $x_2$  :

$$\dot{x}_2 = k x_1$$

## Equação de saída

Sinal de saída :  $y = \theta_J$  (Posição angular da inércia  $J$ )

Utilizando a equação para a mola :

$$\begin{aligned} F_k &= k \int_0^t \omega_k d\tau \\ &= k \int_0^t \omega_J d\tau \\ &= k (\theta_J(t) - \theta_J(0)) = k \theta_J \quad \Rightarrow \quad \theta_J = \frac{1}{k} F_k \end{aligned}$$

Portanto,

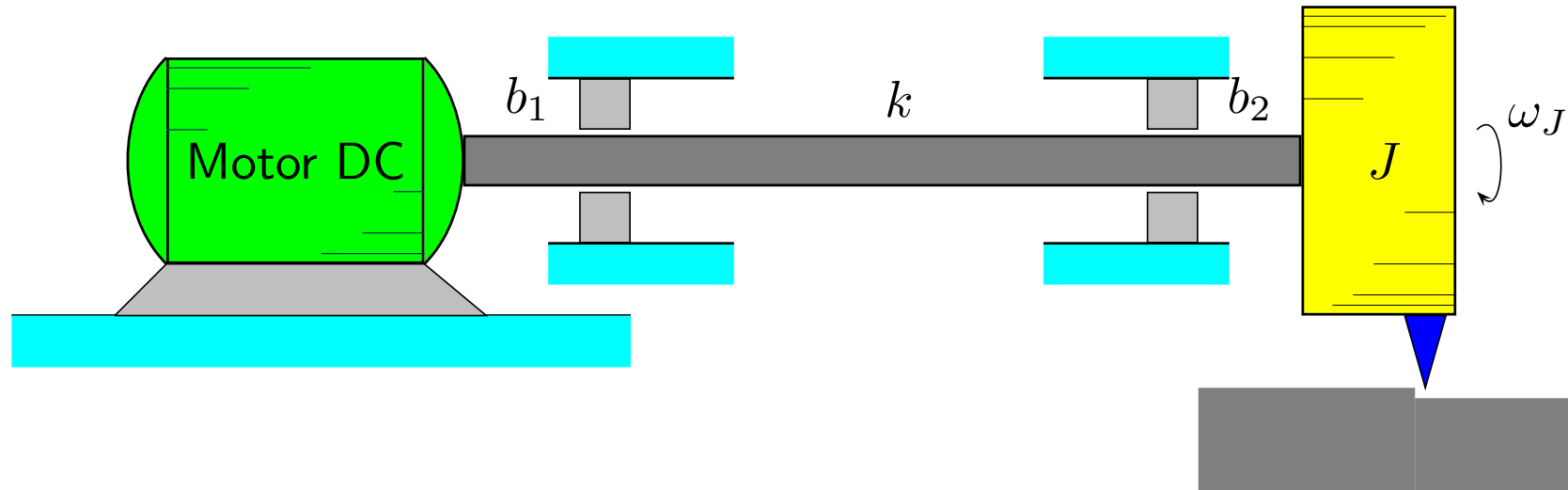
$$y = \frac{1}{k} x_2$$

Resultado :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{b}{J} x_1 - \frac{1}{J} x_2 + \frac{1}{J} T \\ \dot{x}_2 = k x_1 \\ y = \frac{1}{k} x_2 \end{cases}$$

Usando notação matricial :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & -\frac{1}{J} \\ k & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} T \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

**Exemplo 32****Máquina fresadora**

Sinal de entrada :  $T$  (Torque do motor)

Sinal de saída :  $\omega_J$  (Velocidade do rotor  $J$ )

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 2$$

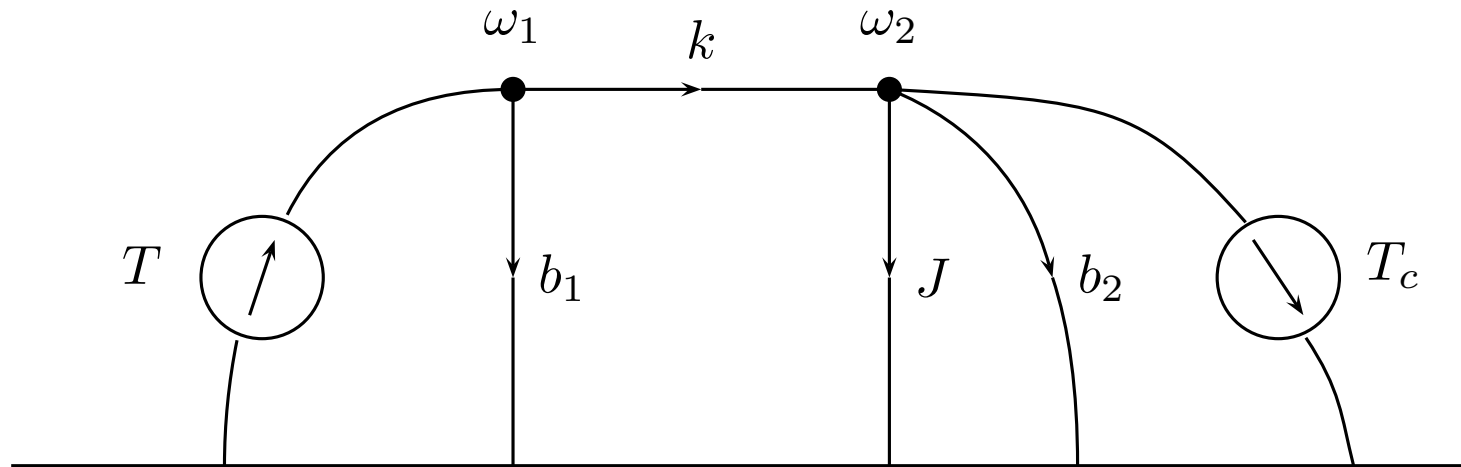
**Grafo**

Figura 16: Grafo orientado.

★ Note que a carga foi modelada por uma fonte de torque.

Obtenção das equações de estado

Fica como exercício ...

## Modelos de sistemas elétricos

Variável seqüenciada : Corrente  $\left[ i \right]$

Variável referenciada : Tensão  $\left[ v \right]$

Variáveis integradas :

$$q = \int_0^t i \, d\tau + q(0)$$

Carga elétrica

$$\lambda = \int_0^t v \, d\tau + \lambda(0)$$

Fluxo magnético  
concatenado

**Relações elementares :**

Capacitor :

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C$$

Indutor :

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Atrito :

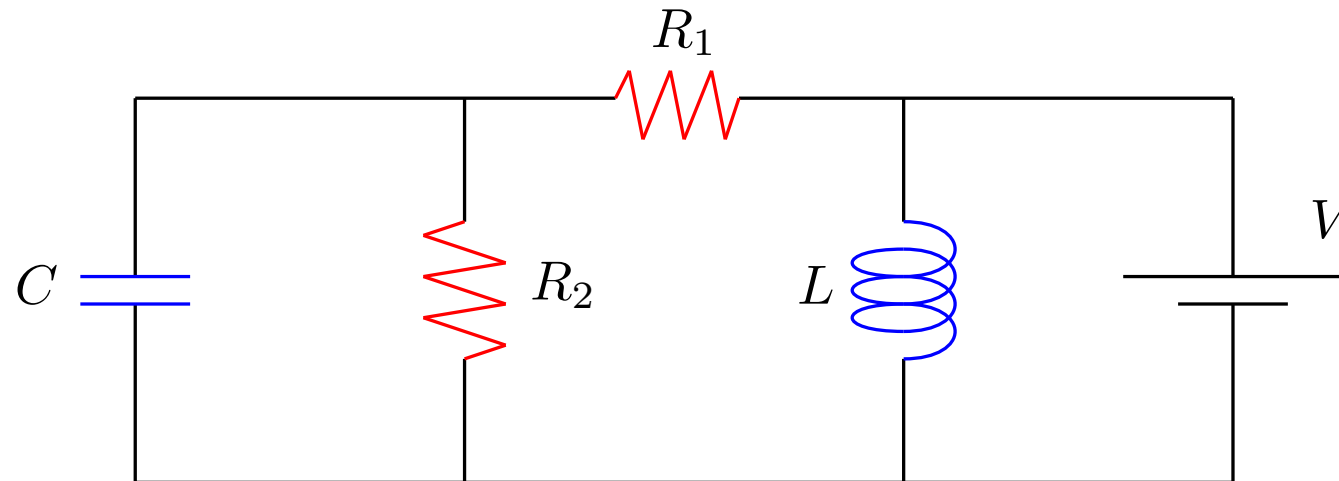
$$v_R = R i_R$$

**Exemplo 33**

Ver exemplos do C. T. Chen !!!

**Exemplo 34**

## Circuito elétrico



Sinal de entrada :  $V$  (Tensão)

Sinal de saída :  $y = v_C$  (Tensão no capacitor  $C$ )

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 2$$

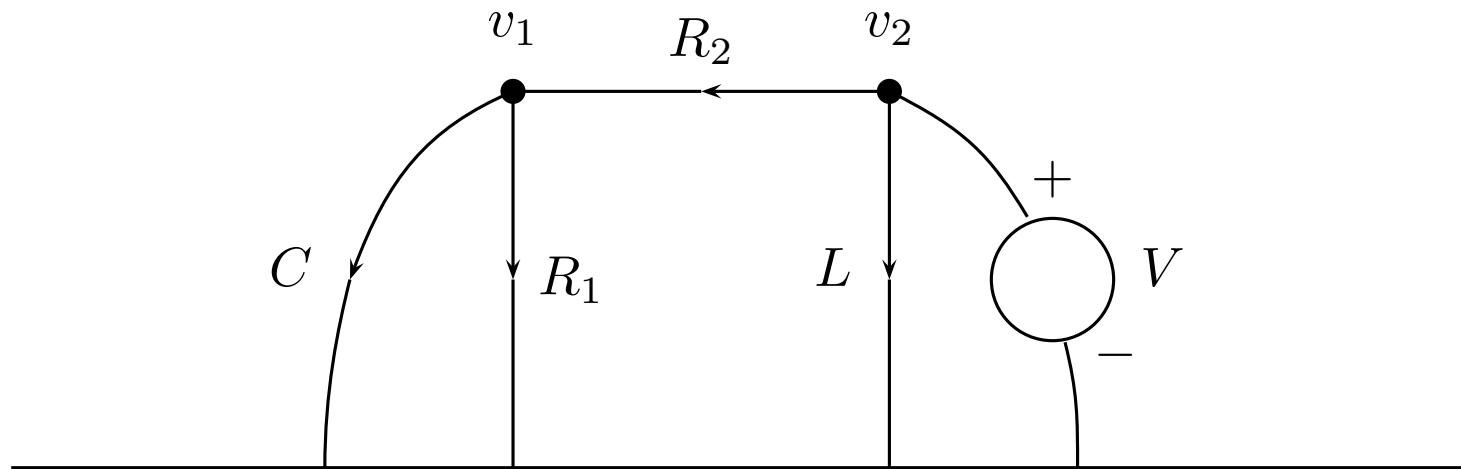
**Grafo**

Figura 17: Grafo orientado.

Equações do grafo

Equações dos Nós : ...

Equações das Malhas : ...

## Obtenção da equação de estado

**Passo 1** : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = v_C$$

(Tensão no capacitor)

$$x_2 = i_L$$

(Corrente no indutor)

**Passo 2** : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

Para o **capacitor** escrevemos :

(...)

## Modelos de sistemas fluidos

Variável seqüenciada : Vazão  $\left[ q \right]$

Variável referenciada : Pressão  $\left[ p \right]$

Variáveis integradas :

$$V = \int_0^t q d\tau + V(0)$$

Volume

$$\Gamma_p = \int_0^t p d\tau + \Gamma_p(0)$$

Quantidade de  
movimento de pressão

**Relações elementares :**

Capacitância fluida :

$$C_F \frac{dp_C}{dt} = q_C$$

Inertância fluida :

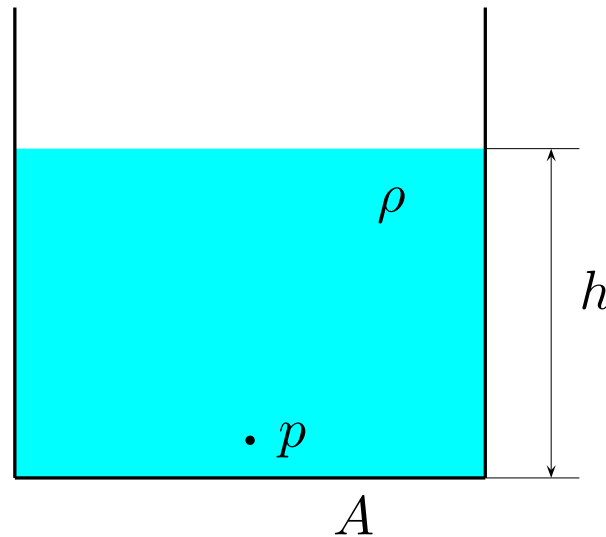
$$P_I = I_F \frac{dq_I}{dt}$$

Resistência fluida :

$$p_R = R_F q_R$$

**Exemplo 35**

Capacitância fluida.



★ Capacitância

$$C_F = \frac{A}{\rho g}$$

(Proporcional à área  $A$ )

**Definição**

$$V = C_F p$$

Pressão no fundo do tanque :

$$p = \rho g h$$

 $\Rightarrow$ 

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

onde :  $\rho$  = densidade do fluido

$g$  = aceleração da gravidade

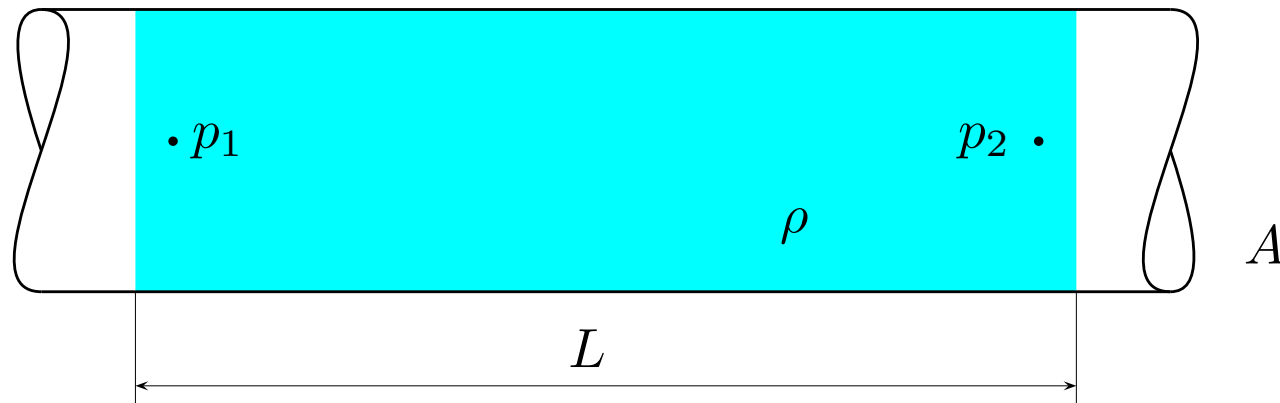
Portanto :

$$V = Ah = A \frac{p}{\rho g} \Rightarrow$$

$$C_F = \frac{A}{\rho g}$$

**Exemplo 36**

Inertância fluida.



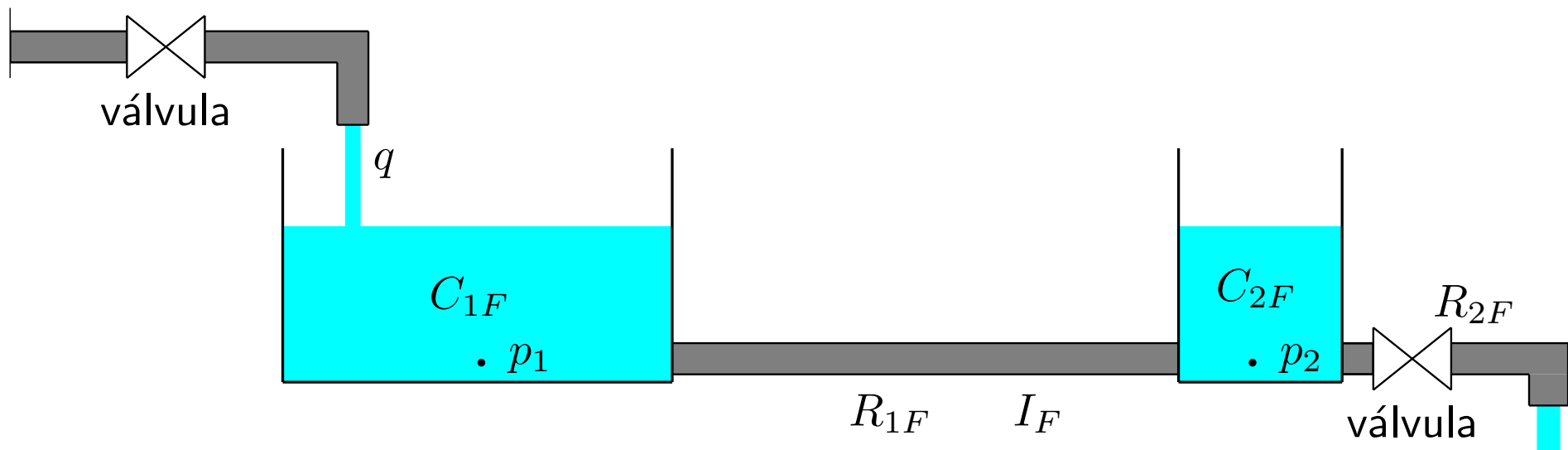
★ Inertância

$$I_F = \frac{\rho L}{A}$$

(Proporcional ao comprimento  $L$ )

**Exemplo 37**

## Sistema fluido.



Sinal de entrada :  $q$  (Vazão)

Sinal de saída :  $h_2$  (Nível do fluido no tanque 2)

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 3$$

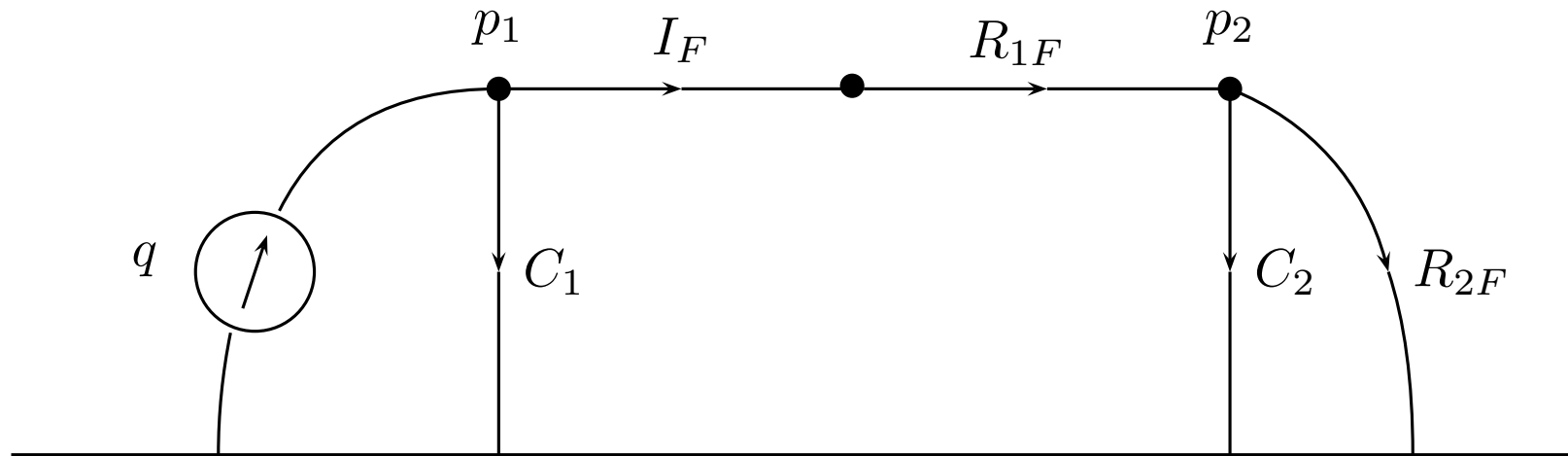
**Grafo**

Figura 18: Grafo orientado.

Equações do grafo

Equações dos Nós : ...

Equações das Malhas : ...

## Obtenção da equação de estado

**Passo 1** : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = p_{C1}$$

(Pressão no tanque 1)

$$x_2 = p_{C2}$$

(Pressão no tanque 2)

$$x_3 = q_F$$

(Vazão na inertância)

**Passo 2** : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

## Obtenção da equação de estado

Fica como exercício...

## Equação de saída

Sinal de saída :  $h_2$  (Nível no tanque 2)

Utilizando a equação para a pressão no tanque 2 :

$$p_{C2} = \rho g h_2 \quad \Rightarrow \quad y = h_2 = \frac{1}{\rho g} p_{C2}$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{\rho g} x_2$$

## Modelos de sistemas térmicos

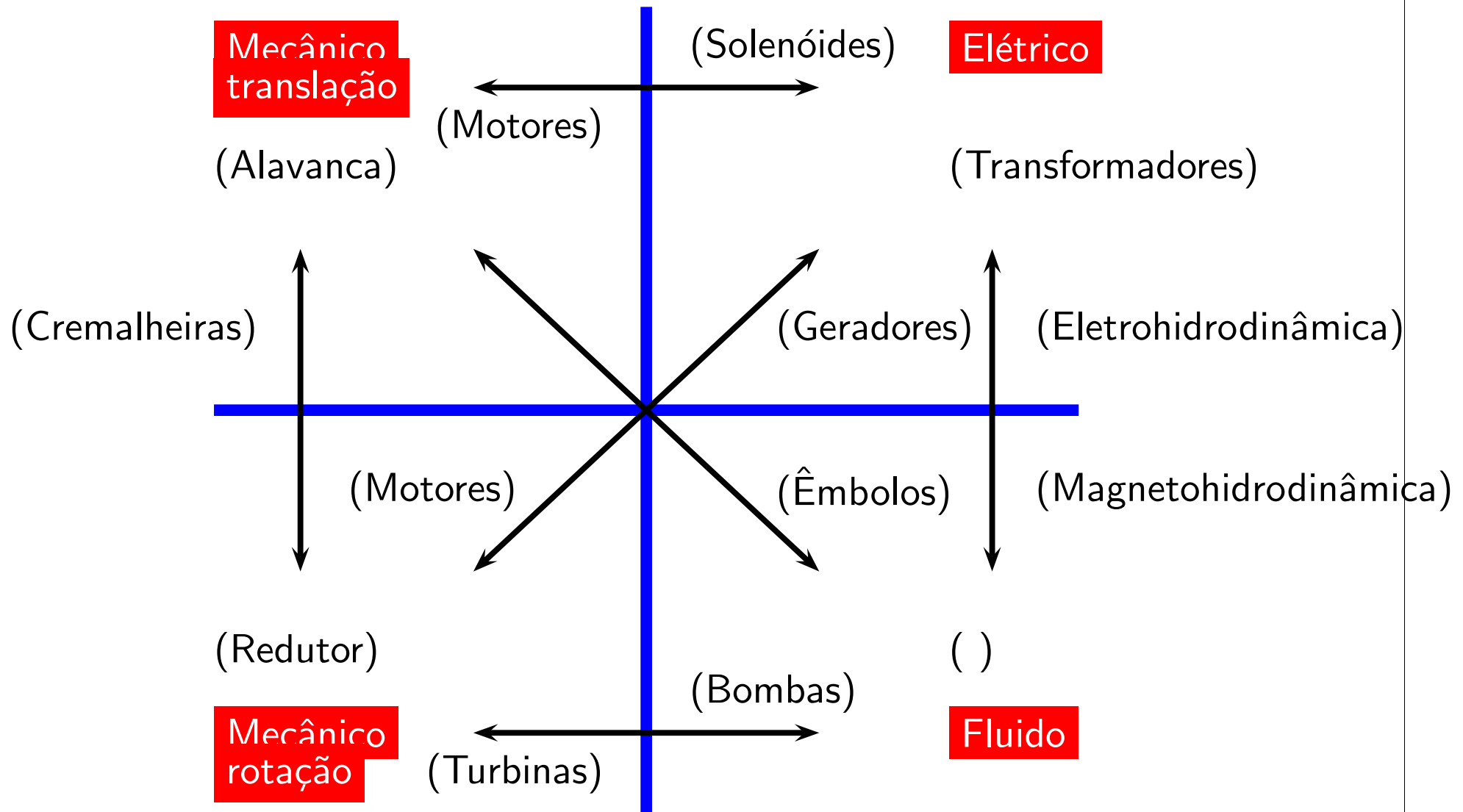
(...)

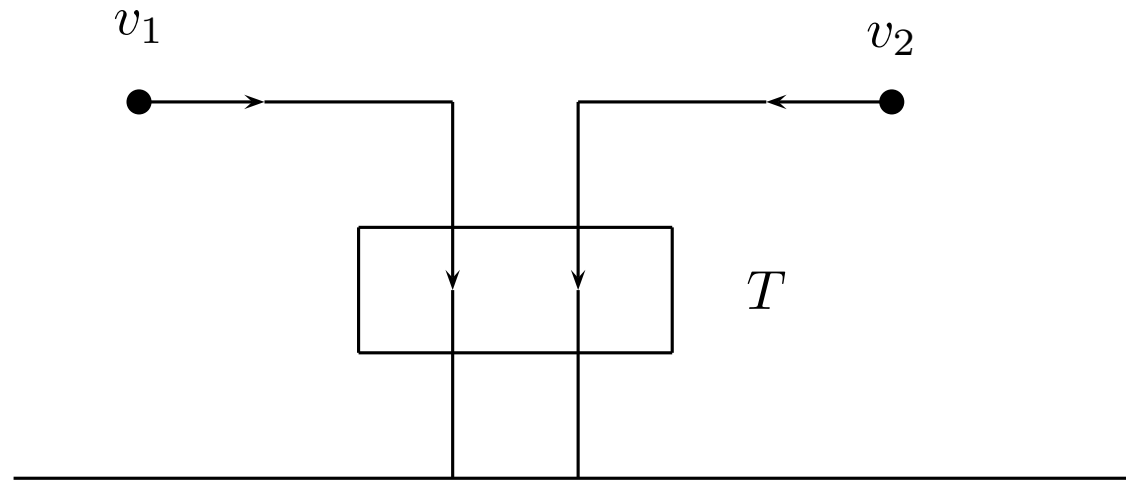
(...)

## Elementos de 2 acessos

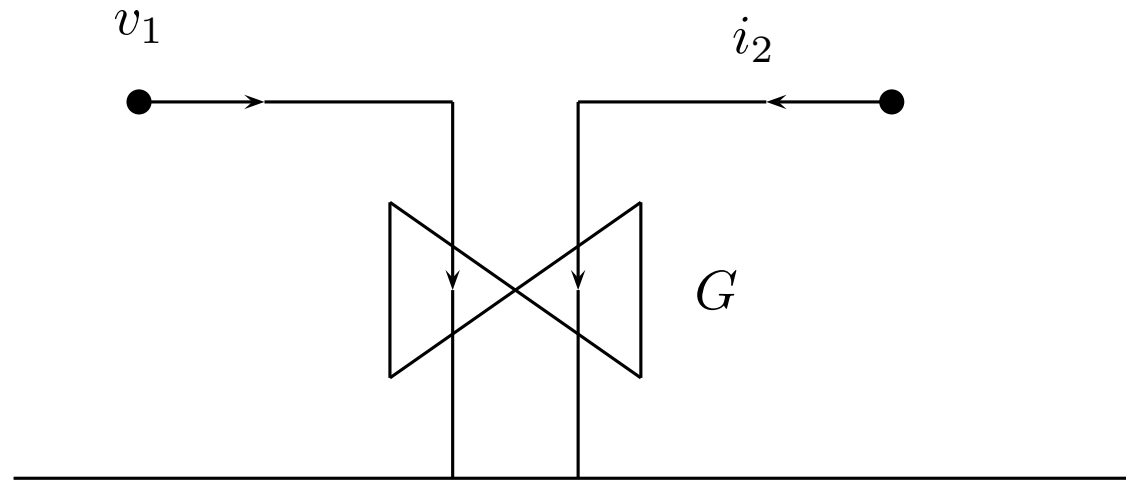
Tipos :

- Transformadores
- Inversores

**Quadro de emprego de elementos de múltiplos acessos**

**Transformador**

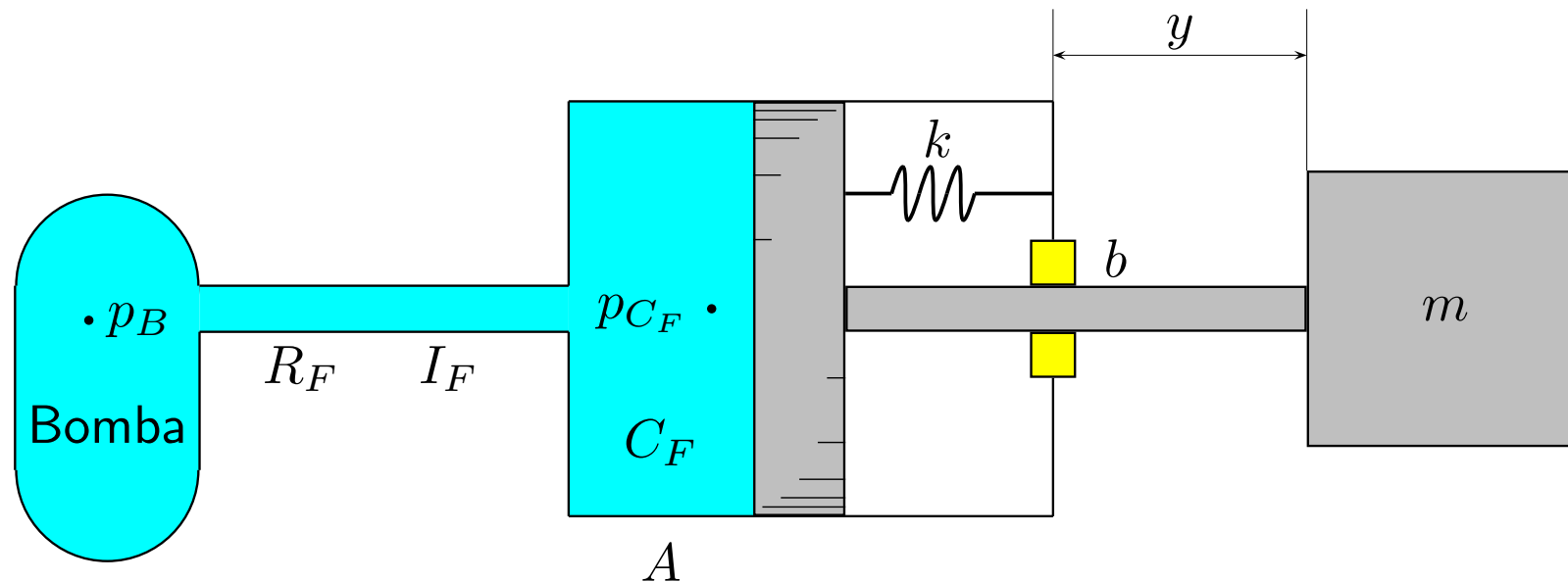
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & -1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

**Inversores**

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -1/G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 38**

## Atuador hidráulico.



Sinal de entrada :  $p_B$  (Pressão da bomba)

Sinal de saída :  $y_m$  (Posição da massa)

**Ordem do sistema** = Número de elementos armazenadores de energia independentes.

Neste exemplo :

$$n = 4$$

## Grafo

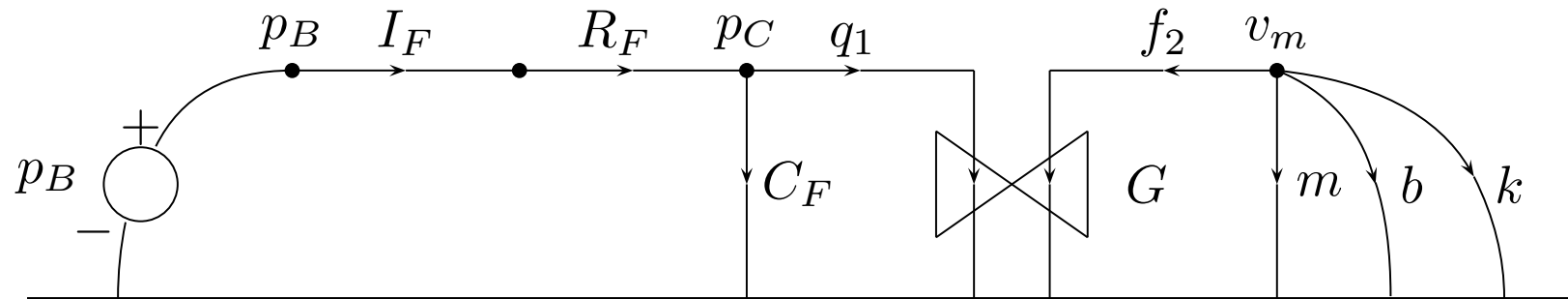


Figura 19: Grafo orientado.

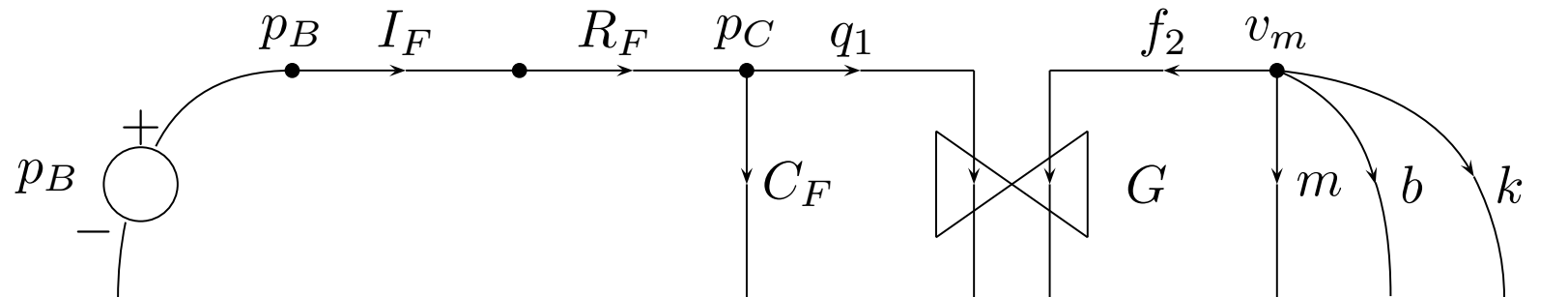
Equações dos Nós :

$$q_I = q_R$$

$$-F_2 = F_m + F_b + F_k$$

$$q_R = q_C + q_1$$

## Grafo



**Equações das Malhas :**

$$p_B = p_I + p_R + p_C \qquad v_m = v_b = v_k$$

$$p_C = p_1 \qquad v_m = v_2$$

**Inversor :**

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/A \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

## Obtenção da equação de estado

**Passo 1** : Escolher as variáveis de estado

$$x_1 = p_C \quad (\text{Pressão no êmbolo})$$

$$x_2 = q_I \quad (\text{Vazão na inertância})$$

$$x_3 = v_m \quad (\text{Velocidade da massa})$$

$$x_4 = F_k \quad (\text{Força na mola})$$

**Passo 2** : Escrever as equações dos elementos armazenadores de energia em função dos estados.

## Obtenção da equação de estado

Fica como exercício...

## 1.10 Sistemas não lineares e linearização

**Problema.** A grande maioria dos sistemas/processos são não lineares.

- ★ Os sistemas NL são de difícil análise.
- ★ Existem muitas ferramentas (eficientes) para a análise de sistemas lineares.

**Uma solução :** Linearização.

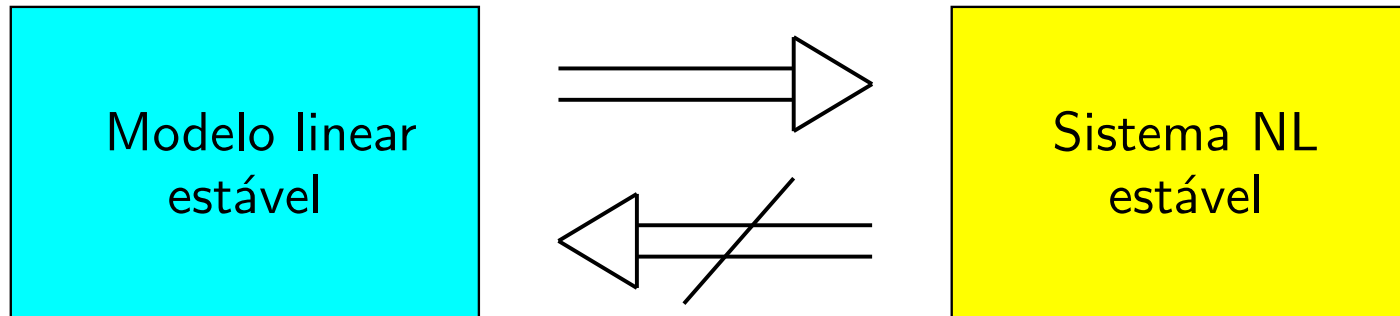
- ★ É o processo de se encontrar uma aproximação linear para o comportamento do sistema NL.

Resultado chave :

Lyapunov mostrou ( $\sim 1890$ ) que

se um modelo linear é válido e estável nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio,

então  $\exists$  uma região contendo esse equilíbrio em que o sistema NL é estável.

**Fato.****Cuidado!** Estabilidade **local** (dentro de uma vizinhança).A linearização pode eliminar **amortecimento não linear**.

Uma representação geral para sistemas NL :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Uma classe de sistema NLs de particular interesse é caracterizada pelo seguinte modelo :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

★ Essa classe é dita *affine em u* .

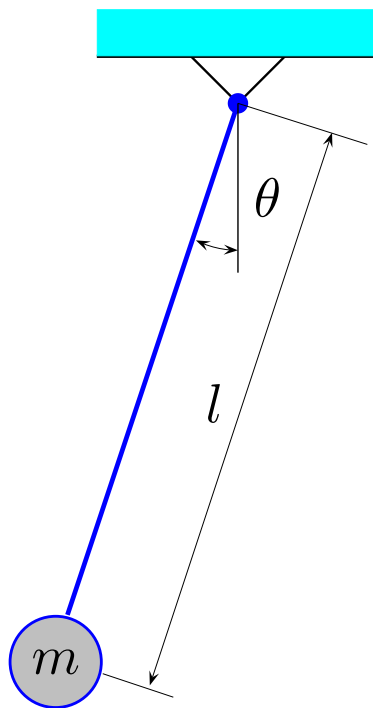
**Definição.** Um sistema é dito **autônomo** se  $f(\cdot)$  não depende explicitamente de  $t$ , i.e., se a dinâmica do sistema é dada por

$$\dot{x} = f(x)$$

Em outras palavras,  $u \equiv 0$ .

**Definição.** Um estado  $x^\circ$  é dito **equilíbrio** (ou ponto de equilíbrio) do sistema sse

$$f(x^\circ) = 0$$

**Exemplo 39** Pêndulo.

EDO :  $J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$

Estado : 
$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Eq. de estado : 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{J}mlg \sin(x_1) \end{cases}$$

Equilíbrio : 
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \sin(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm n\pi$$

Método para linearização : Expansão em série de Taylor em torno de  $x^\circ$ .

$$\dot{x} = f(x) = f(x^\circ) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ)^2 + \dots$$

Truncando a expressão,

$$\dot{x} = f(x) \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ)$$

**Nota.** Lembre-se que  $f(x^\circ) = 0$  !

Definindo-se

$$\boxed{v = x - x^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{v} = \dot{x}}$$

$$\boxed{A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^{\circ}}}$$

podemos escrever a equação linearizada como

$$\boxed{\dot{v} = Av}$$

**Resultado mais geral**

Dado o sistema NL :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

**Modelo linearizado** :

$$\dot{v} = Av + Bw$$

onde

$$v = x - x^{\circ}$$

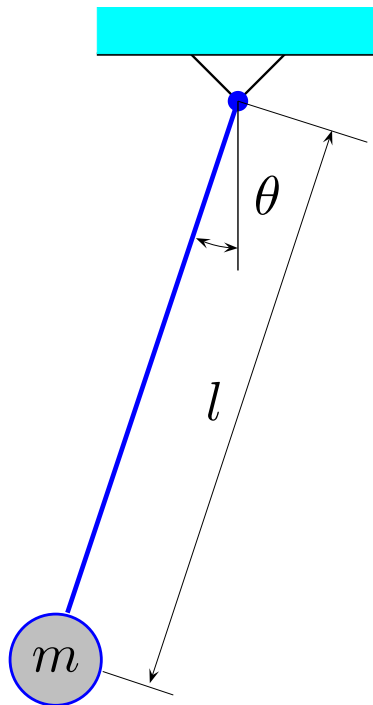
$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^{\circ}, u=u^{\circ}}$$

$$w = u - u^{\circ}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x^{\circ}, u=u^{\circ}}$$

**Exemplo 40**

Pêndulo.



$$\text{EDO : } J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$$

$$\text{Eq. de estado : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{J} mlg \sin(x_1) \end{cases}$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio  $x^\circ = 0$  :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mlg}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mlg}{J} & 0 \end{bmatrix} v$$

**Exemplo 41** Pêndulo com atrito.

$$\text{EDO : } J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta + b\dot{\theta} = 0$$

$$\text{Eq. de estado : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{mlg}{J} \sin(x_1) - \frac{b}{J}x_2 = -c_1 \sin(x_1) - c_2x_2 \end{cases}$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio  $x^\circ = 0$  :

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} v$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio  $x^\circ = (\pi, 0)$  :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} v$$

**Exercício.** Linearizar o sistema *massa-mola não linear* abaixo

$$m\ddot{x} + k_1x + k_2x^3 = 0$$

Ref.: (?)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro  
EE Escola de Engenharia  
DEL Departamento de Eletrônica

COV-758 Comunicação e Controle

## Capítulo # 2

## 2 Análise da resposta transitória

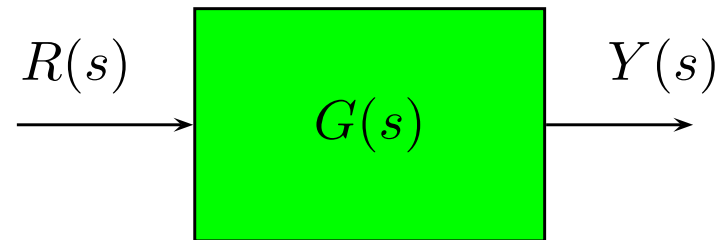
### Conteúdo

1. Introdução
2. Erro de regime
3. Sinais de teste típicos
4. Sistema de primeira ordem
5. Sistema de segunda ordem
6. Sistema em malha fechada
7. Especificações de desempenho
8. Índices de desempenho

## 2.1 Introdução

- Sinais de teste
- Resposta transitória
- Malha fechada

## 2.2 Erro de regime



Erro de rastreamento :

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Aplicando Laplace :

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s) - G(s)R(s) \\ &= [1 - G(s)] R(s) \end{aligned}$$

Erro de rastreamento :

$$E(s) = [1 - G(s)] R(s)$$

Aplicando o teorema do valor final :

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

Erro de regime :

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s [1 - G(s)] R(s)$$

## 2.3 Sinais de teste típicos

- Impulso unitário
- Degrau unitário
- Rampa unitária
- Senóide

Degrau unitário :

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace :

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Rampa unitária :

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace :

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

## 2.4 Sistema de primeira ordem

Forma padrão :

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

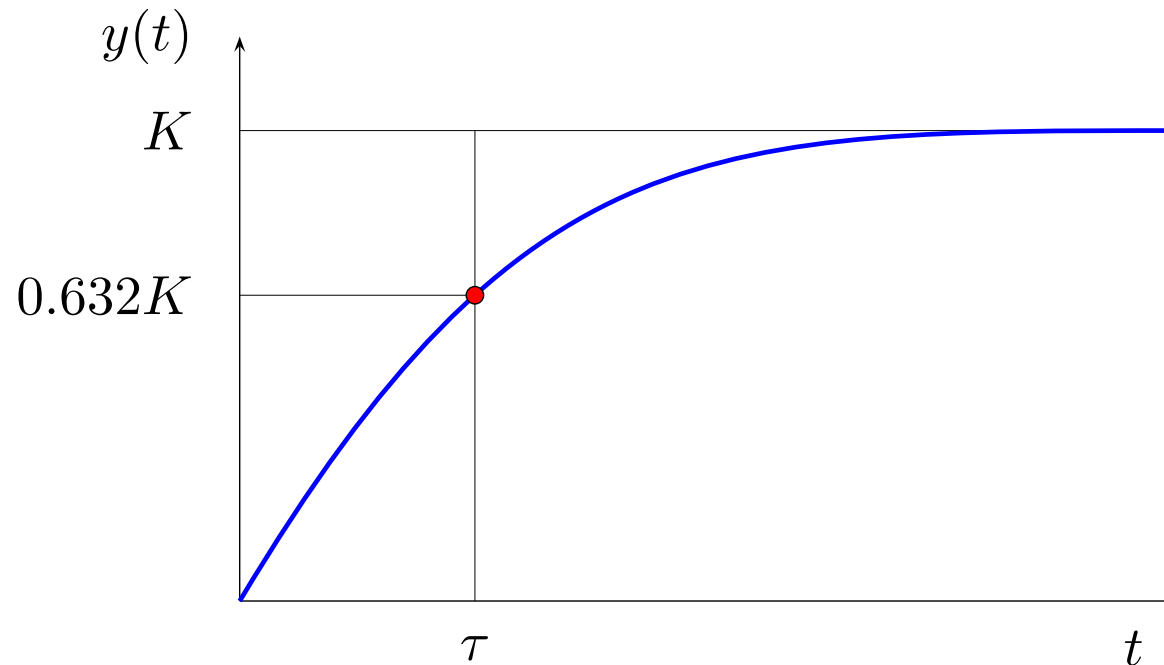
★  $K$  = ganho DC.

★  $\tau$  = constante de tempo.

## Resposta ao degrau unitário

Solução analítica :

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \right] \\&= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{\tau}} \right] \\&= K \left( 1 - e^{(-1/\tau)t} \right)\end{aligned}$$

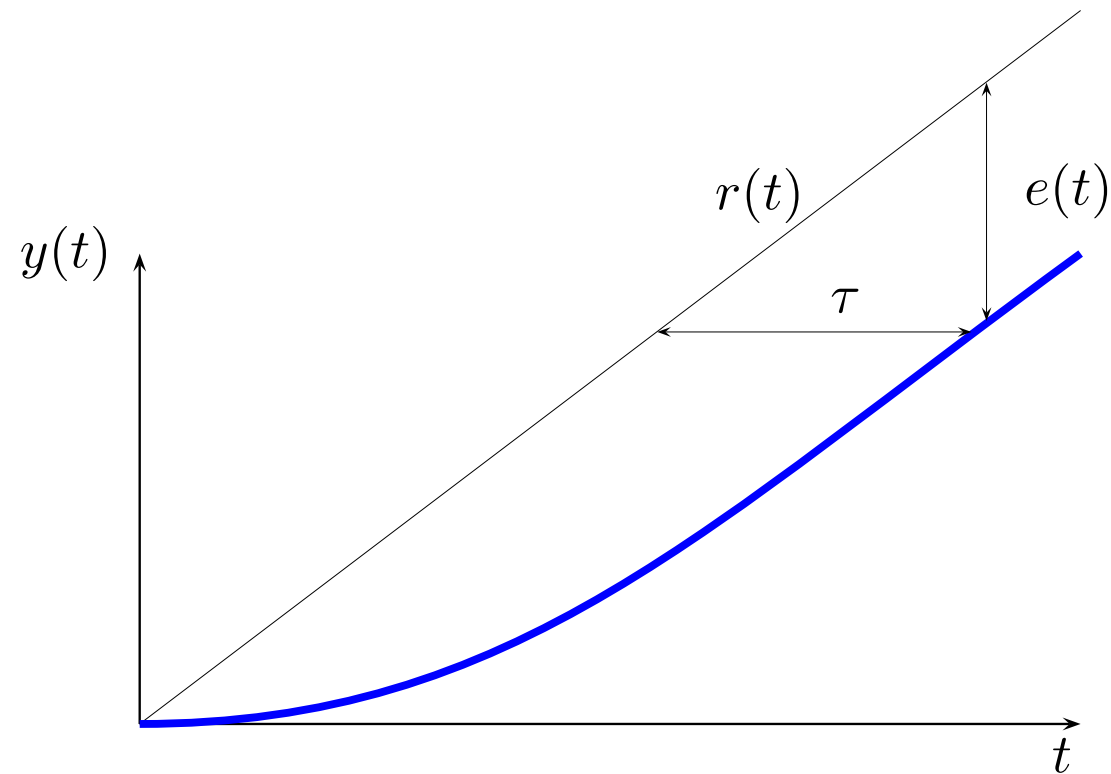
**Resposta ao degrau unitário**

★ Erro de regime : 
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ 1 - G(s) \right] \frac{1}{s} = 1 - G(0) = 1 - K$$

**Resposta à rampa unitária**

Solução analítica :

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2} \right] \\&= \mathcal{L}^{-1} \left[ K \left( \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right] \\&= K \left( t - \tau + \tau e^{(-1/\tau)t} \right)\end{aligned}$$

**Resposta à rampa unitária**

★ Erro de regime :

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ 1 - G(s) \right] \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K}{\tau s + 1} \right] \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\tau s + 1 - K}{\tau s^2 + s} \right] \end{aligned}$$

Aplicando L'Hospital :

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\tau}{2\tau s + 1} \right] \\ &= \tau \end{aligned}$$

## 2.5 Sistema de segunda ordem

Forma padrão :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

★  $\omega_n$  = Freqüência natural de oscilação.

★  $\zeta$  = Coeficiente de amortecimento.

## Coeficiente de amortecimento

3 casos distintos :

★ Caso sub-amortecido :

$$0 < \zeta < 1$$

★ Amortecimento crítico :

$$\zeta = 1$$

★ Caso super-amortecido :

$$\zeta > 1$$

## Resposta ao degrau unitário

Solução analítica (caso sub-amortecido) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s} \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \end{aligned}$$

onde :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

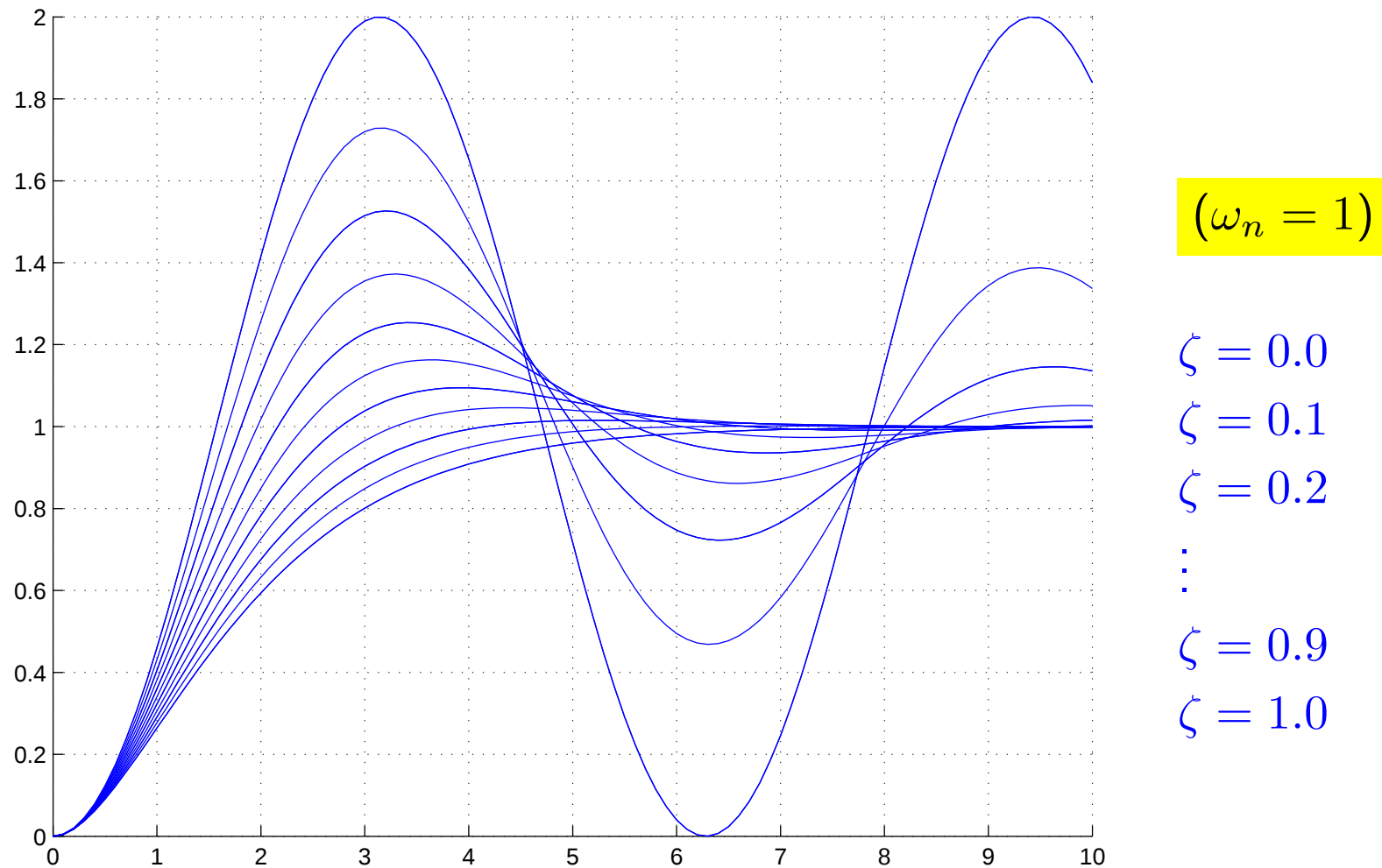
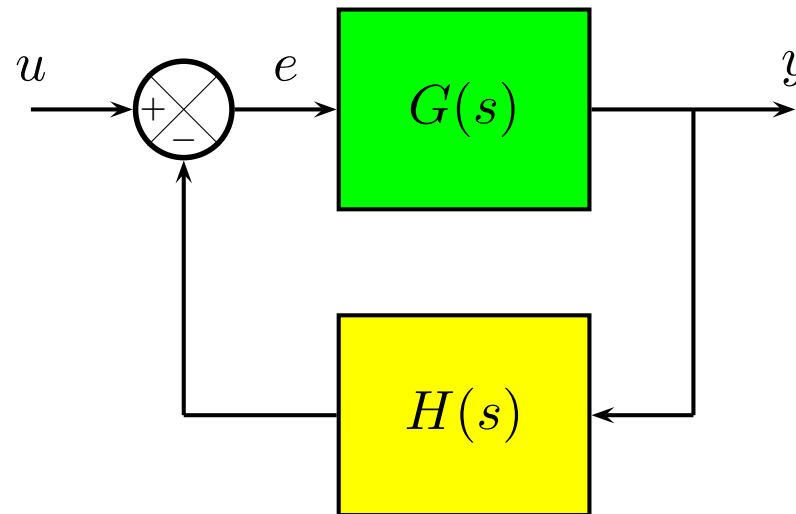
**Resposta ao degrau unitário**

Figura 20: Resposta ao degrau unitário. Script **rdegrau2.m**.

★ Erro de regime ( $\zeta \neq 0$ ) :

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ 1 - G(s) \right] \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \\ &= 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 2.6 Sistema em malha fechada



FT em malha fechada :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G}{1 + GH}$$

**Ganho de malha**

$$G_L(s) = G(s) H(s)$$

**Forma padrão**

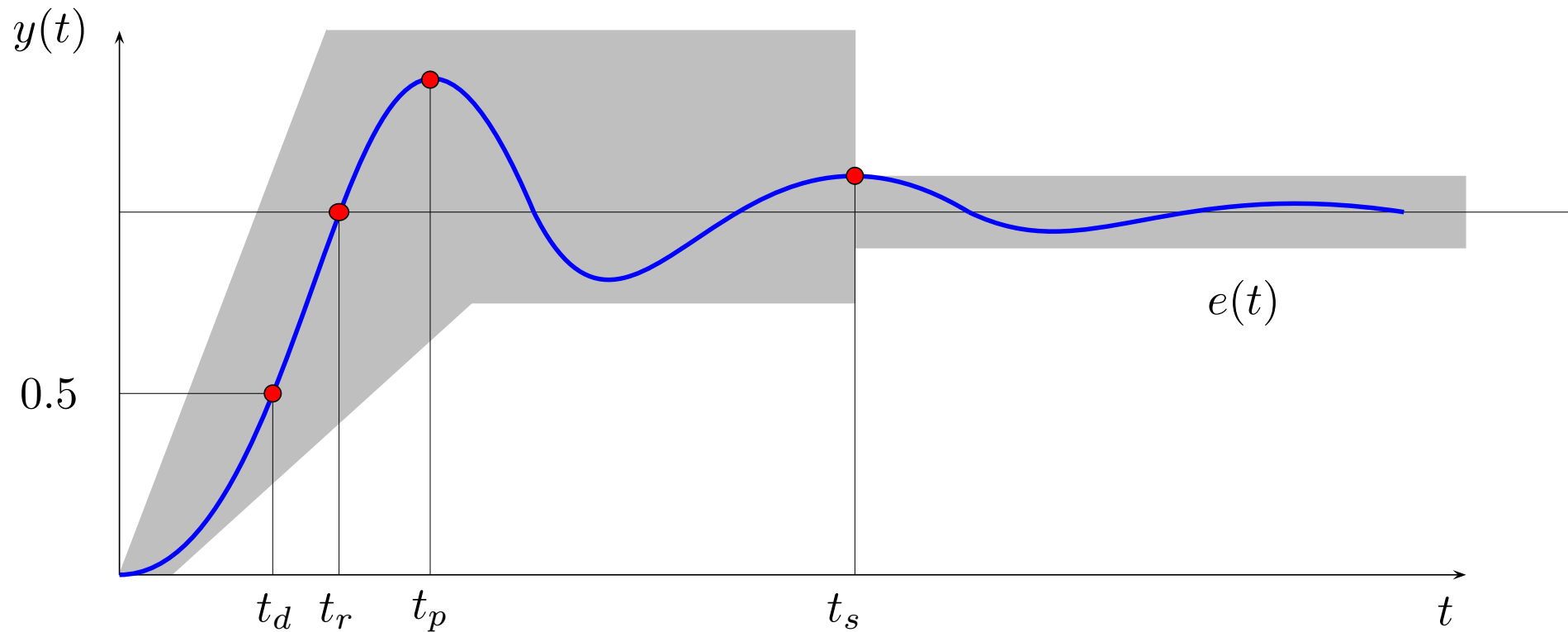
$$G_L(s) = G(s) H(s) = \frac{K(\tau_{b_1}s + 1)(\tau_{b_2}s + 1) \cdots (\tau_{b_m}s + 1)}{s^N(\tau_{a_1}s + 1)(\tau_{a_2}s + 1) \cdots (\tau_{a_n}s + 1)}$$

- ★  $K$  = ganho DC.
- ★  $\tau_i$  = constante de tempo.
- ★  $N$  define o tipo do sistema.

## 2.7 Especificações de desempenho

Especificações usuais :

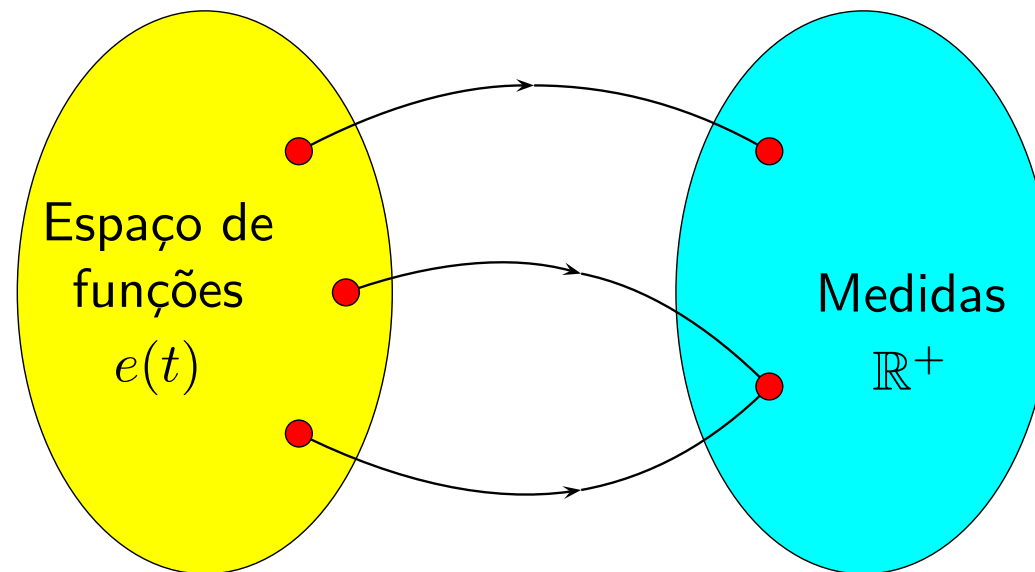
- Tempo de atraso
- Tempo de subida
- Tempo de pico
- Máximo overshoot
- Tempo de assentamento



Notação :  $t_d$  = tempo de atraso  
 $t_r$  = tempo de subida  
 $t_p$  = tempo de pico  
 $t_s$  = tempo de assentamento

## 2.8 Índices de desempenho

★ Medida da “qualidade” da resposta do sistema.



**Índices mais usados**

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e^2 dt$$

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} t e^2 dt$$

$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |e| dt$$

$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e| dt$$

★ Se  $e(t) \not\rightarrow 0 \Rightarrow \text{Índice} \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 1** Análise utilizando Matlab/Simulink

Vide exemplos do livro texto (Ogata, 1997):

- Exemplo 4-4, página 162
- Seção 4-5, página 178

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro  
EE Escola de Engenharia  
DEL Departamento de Eletrônica

COV-758 Comunicação e Controle

## Capítulo # 3

## 3 Introdução à estabilidade

### Conteúdo

1. Introdução
2. Estabilidade entrada/saída
  - Definições: [*Sinal limitado*] [*Estabilidade BIBO*]
  - Teoremas: [*Estabilidade BIBO*] [*Resposta em regime*] [*FT BIBO*]
3. Estabilidade interna
  - Definições: [*Ponto de equilíbrio*] [*Estabilidade Lyapunov*]
  - Teoremas: [*Estabilidade marginal*] [*Estabilidade assintótica*]
4. Método de Lyapunov
  - Teoremas: [*E*] [*EA*]
  - Exemplos: [*1*] [*2*] [*3*]

### 3.1 Introdução

★ Estabilidade é uma propriedade **fundamental** para qualquer sistema.

**Propriedade.** A resposta de um SLIT pode ser decomposta como

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta de um SLIT} \\ y(t) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta com} \\ x(0) = 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta com} \\ u(t) \equiv 0 \\ \hline \end{array}$$

★ Podemos estudar a estabilidade de cada resposta separadamente:

Estabilidade BIBO

}

→ para resposta com  $x(0) = 0$

Estabilidade marginal

}

Estabilidade assintótica

→ para resposta com  $u(t) \equiv 0$

## 3.2 Estabilidade entrada/saída

Modelo do SLIT :

$g(t)$  = resposta ao impulso.

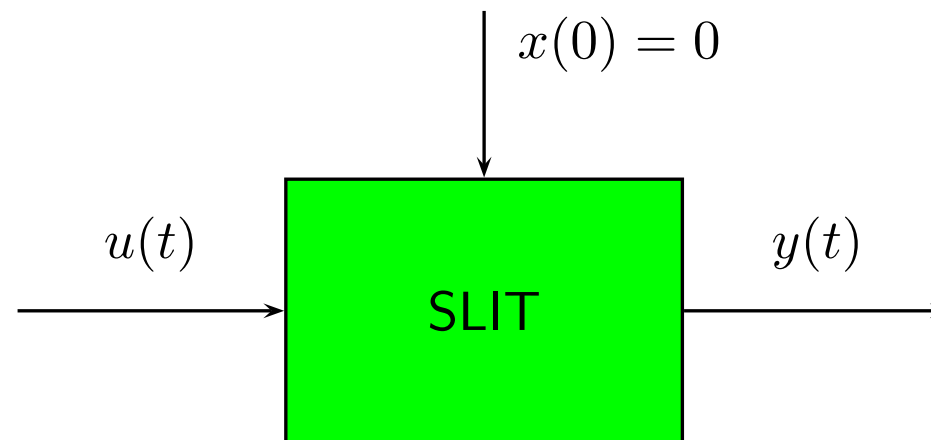


Figura 21: Resposta com estado nulo.

A resposta é dada pela **convolução** :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau)g(\tau)d\tau \end{aligned}$$

★  $g(t)$  = resposta ao impulso aplicado em  $t = 0$  com  $x(0) = 0$ .

★ A convolução é **comutativa**.

**Definição.** (*Sinal limitado*)

Um sinal  $z(t)$  é dito **limitado** ou ***bounded*** se existe uma constante  $z_m$  tal que

$$|z(t)| \leq z_m < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

**Definição.** (*Estabilidade BIBO*)

Um sistema é dito **BIBO estável** se, para **toda entrada** limitada, a saída é limitada.

**Nota.** Lembrar que as **c.i.'s são nulas !**

Teorema. *(BIBO estabilidade)*

BIBO estabilidade  $\Leftrightarrow g(t)$  absolutamente integrável.

★  $g(t)$  abs. integrável  $\Rightarrow$

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq M < \infty$$

**Teorema.** *(Resposta em regime)*

Se um sistema com resposta ao impulso  $g(t)$  é BIBO estável,  
então :

$$(1) \quad u(t) \equiv a \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0)a$$

$$(2) \quad u(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j\omega_0)| \sin\left(\omega_0 t + \text{fase}[G(j\omega_0)]\right)$$

★  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ .

★  $G(0) = \text{ganho DC}$ .

**Teorema.** *(Função de transferência BIBO)*

Um SLIT com função de transferência  $G(s)$  é BIBO estável sse todos os pólos de  $G(s)$  têm **parte real negativa**.

$$\text{BIBO estável} \Leftrightarrow \text{Re}\{\text{pólos}\} < 0$$

### 3.3 Estabilidade interna

Sistema :

$$\dot{x} = f(x)$$

★ Entrada  $u(t) \equiv 0$  .

★ Hipótese :  $f(0) = 0$  .

(...)

**Definição.** *(Ponto de equilíbrio)*

$x^\circ$  é um ponto de equilíbrio de  $\dot{x} = f(x)$  sse

$$f(x^\circ) = 0.$$

**Nota.** Também denominado ponto singular ou ponto crítico.

**Definição.** *(Estabilidade Lyapunov)*

O ponto de equilíbrio  $x^\circ$  de  $\dot{x} = f(x)$  é **estável** no sentido de Lyapunov se

$$\forall \varepsilon > 0$$

,

$$\exists \delta > 0$$

,

tal que

$$\|x(0) - x^\circ\| < \delta$$

$\Rightarrow$

$$\|x(t) - x^\circ\| < \varepsilon$$

,

$$\forall t > 0.$$

**Nota.** Raciocínio  $\delta/\varepsilon$ .

**Exemplo 1** Oscilador harmônico

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x$$

Equação característica :  $s^2 + \omega^2 = 0$  ,  $\omega^2 = 3$

Autovalores :  $\lambda_1 = \sqrt{3}i$  ,

$$\lambda_2 = -\sqrt{3}i$$

- ★ Este sistema tem um único equilíbrio  $x^\circ = 0$ .
- ★ Usando a definição, verifica-se que  $x^\circ$  é estável .
- ★ Neste caso, diz-se que o sistema é estável .

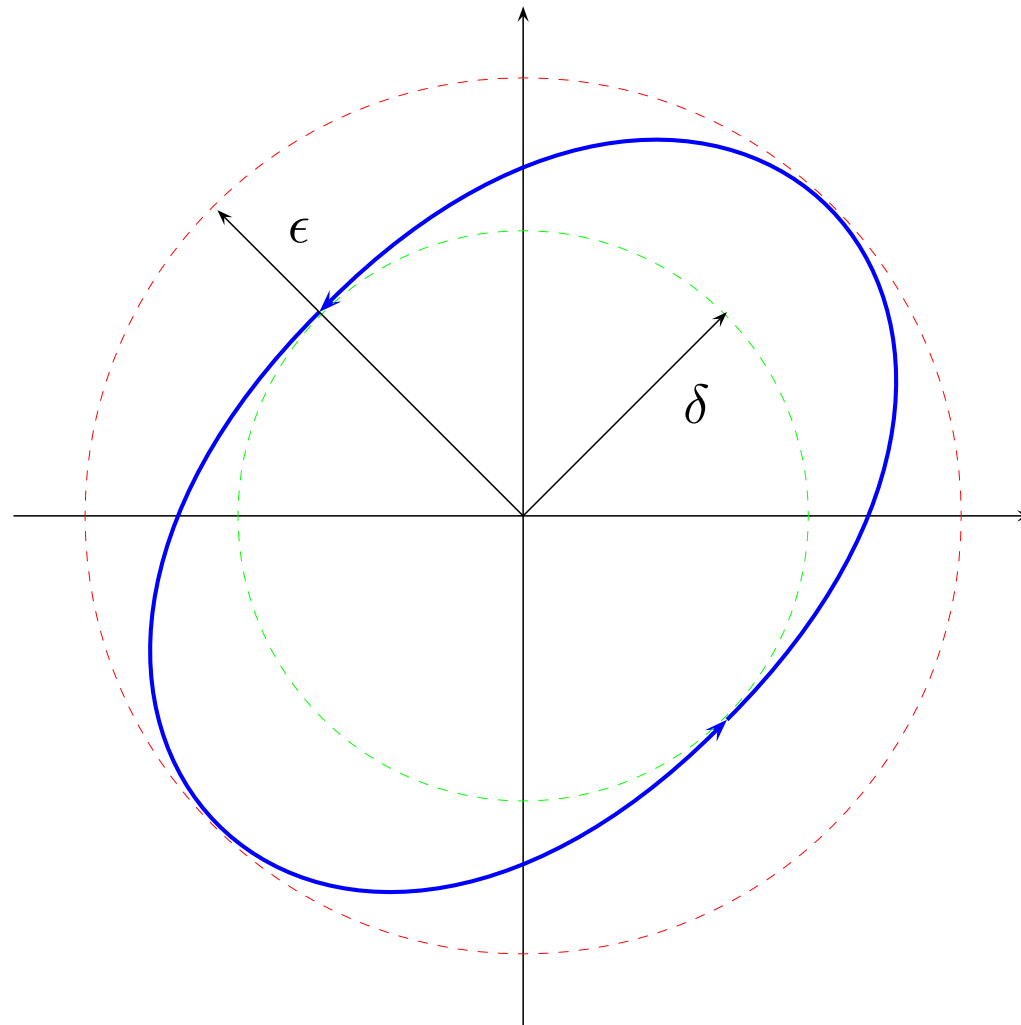


Figura 22: Plano de fase.

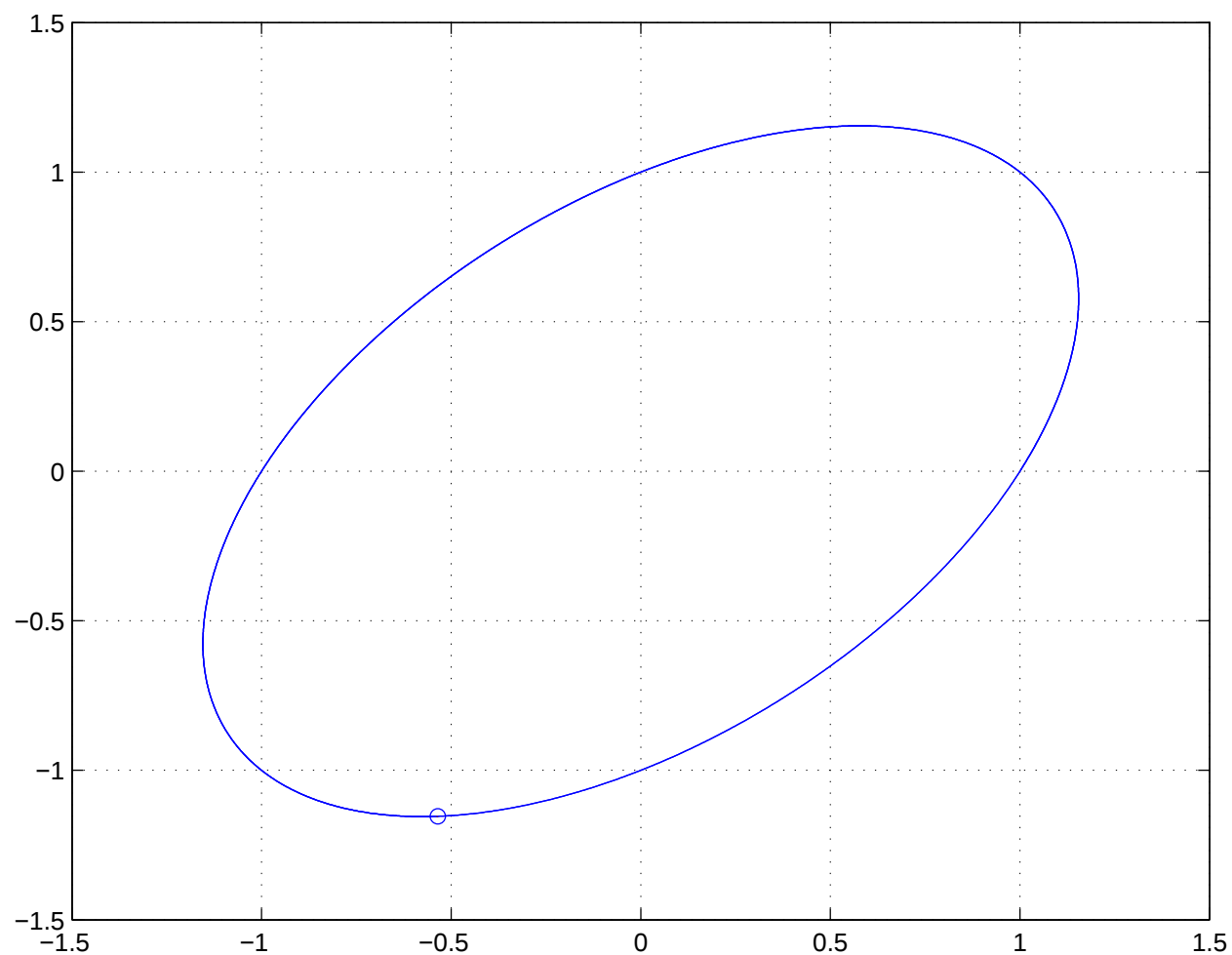


Figura 23: Resultado de simulação usando MATLAB. (Script: `fig1.m`)

**Teorema.** *(Estabilidade marginal)*

O sistema  $\dot{x} = Ax$  é **marginalmente estável** sse  $\exists \lambda_i(A)$  tal que

(1)  $\text{Re}(\lambda_i(A)) = 0$

(2) o bloco de Jordan associado é de 1a. ordem.

**Exemplo 2**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

- ★ A matriz  $A$  possui 3 autovalores :  $\lambda = \{0, 0, -1\}$ .
- ★ Todos os autovalores são simples  $\Rightarrow$  blocos de Jordan de 1a. ordem.
- ★ O sistema é **marginalmente estável**.

**Exemplo 3**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

- ★ A matriz  $A$  possui 3 autovalores :  $\lambda = \{0, 0, -1\}$ .
- ★ O autovalor 0 tem bloco de Jordan associado de 2a. ordem.
- ★ O sistema é instável.

Teorema. *(Estabilidade assintótica)*

O sistema  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável sse  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ .

Fato.

Estabilidade assintótica  $\Rightarrow$  estabilidade BIBO.

Fato.

Estabilidade assintótica  $\nRightarrow$  estabilidade BIBO.

### 3.4 Método de Lyapunov

- ★ É um método geral para análise de estabilidade.
- ★ Aplica-se a sistemas contínuos e discretos.
- ★ Aplica-se a sistemas lineares e não-lineares.

**Teorema.** *(Estabilidade)*

O ponto de equilíbrio  $x^o$  é **estável (E)** se existir uma função  $V(x)$  tal que

- (1)  $V(x)$  é contínua em  $x$
- (2)  $V(0) = 0$
- (3)  $V(x) > 0$
- (4)  $\dot{V}(x) \leq 0$

**Nota.** A função  $V(x)$  é denominada **Função de Lyapunov**.

**Nota.** A função  $V(\cdot)$  satisfaz quase todas as propriedades de uma **norma**.

## Interpretação.

- ★  $V(x)$  pode ser vista como a distância de  $x(t)$  do equilíbrio.
- ★  $\dot{V}(x) \leq 0$  assegura que essa distância não está aumentando.

**Teorema.** *(Estabilidade assintótica)*

**Se**

$$(4) \quad \dot{V}(x) < 0$$

então a solução é **assintoticamente estável (AE)**.

**Nota.**  $\dot{V}(x) < 0$  assegura que a distância está diminuindo.

**Importante :**

- ★ A dificuldade do método de Lyapunov é achar  $V(x)$ .
- ★ No caso de sistemas lineares esta busca é relativamente mais simples.

Basta escolher uma **forma quadrática** em  $x$ .

**Exemplo 4** Considere o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = ax$$

Escolhemos a função de Lyapunov :

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Derivando :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = x\dot{x} = ax^2$$

Portanto : condição para **E** :

$$a \leq 0$$

condição para **EA** :

$$a < 0$$

**Exemplo 5** Considere agora um sistema de ordem  $n$

$$\dot{x} = Ax$$

Escolhemos a função de Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

Derivando :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P A x + (A x)^T P x \\ &= x^T \underbrace{(P A + A^T P)}_{-Q} x = -x^T Q x\end{aligned}$$

Portanto : condição para  $E$  :

$$Q = Q^T \geq 0$$

condição para  $EA$  :

$$Q = Q^T > 0$$

**Exemplo 6** Para o sistema linear descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x,$$

escolhemos a função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x, \text{ onde}$$

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha > 1.$$

Encontre um valor de  $\alpha$  que permita concluir a estabilidade assintótica do sistema dado.

**Solução.**

Equação de Lyapunov :  $PA + A^T P = -Q$

Substituindo valores,

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & \alpha - 5 \\ \alpha - 5 & -2 \end{bmatrix} = -Q. \end{aligned}$$

Portanto :

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 5 - \alpha \\ 5 - \alpha & 2 \end{bmatrix} .$$

Um valor de  $\alpha$  que garante  $Q > 0$  é :

$$\alpha = 5$$

Pelo **lema de Sylvester**, a condição para a positividade de  $Q$  é

$$\Delta_1 = q_{11} = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \det(Q) = -\alpha^2 + 10\alpha - 13 > 0$$

Solução :

$$5 - 2\sqrt{3} < \alpha < 5 + 2\sqrt{3} .$$

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro  
EE Escola de Engenharia  
DEL Departamento de Eletrônica

COV-758 Comunicação e Controle

## Capítulo # 4

## 4 Projeto de controladores

### Conteúdo

1. Introdução
2. Exemplos preliminares
3. Controladores PID
4. Efeito do termo integral
5. Efeito do termo derivativo

## 4.1 Introdução

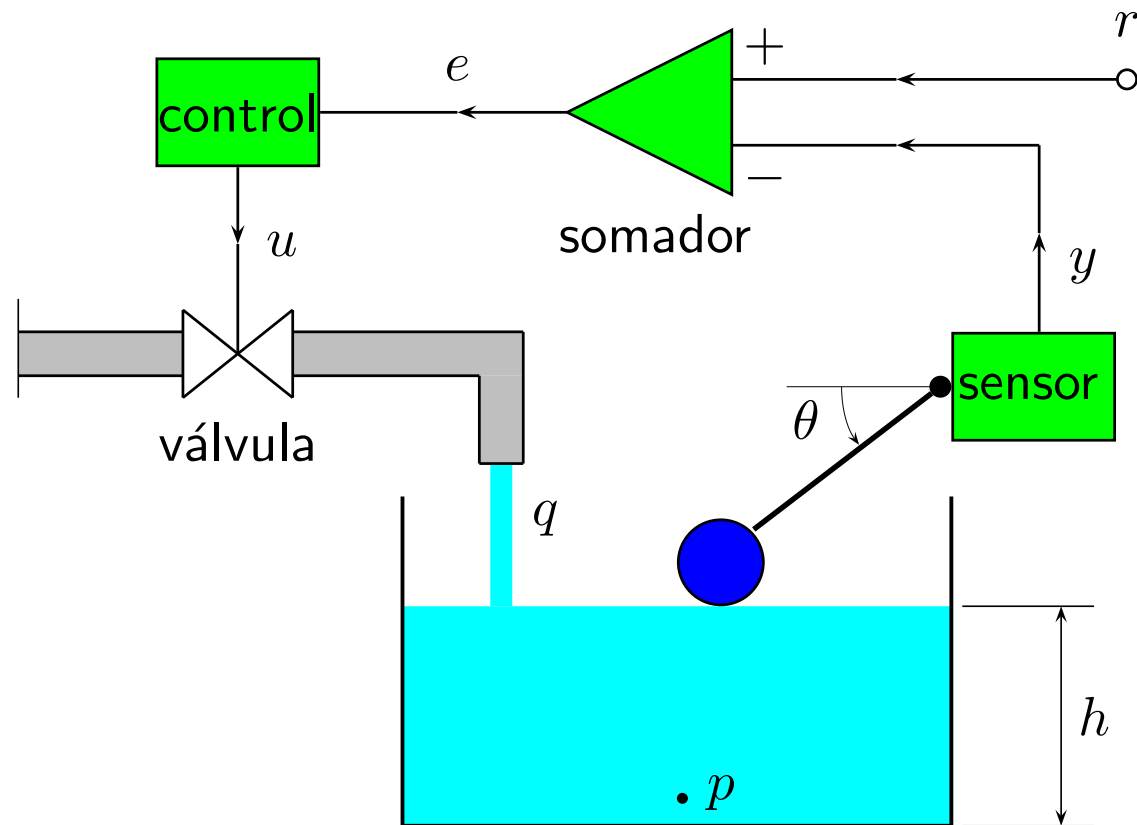
(...)

## 4.2 Exemplos preliminares

(...)

**Exemplo 1**

Controle de nível de tanque fechado.



**Hipóteses :**

Válvula linear :

$$q = c_1 u$$

Sensor linear :

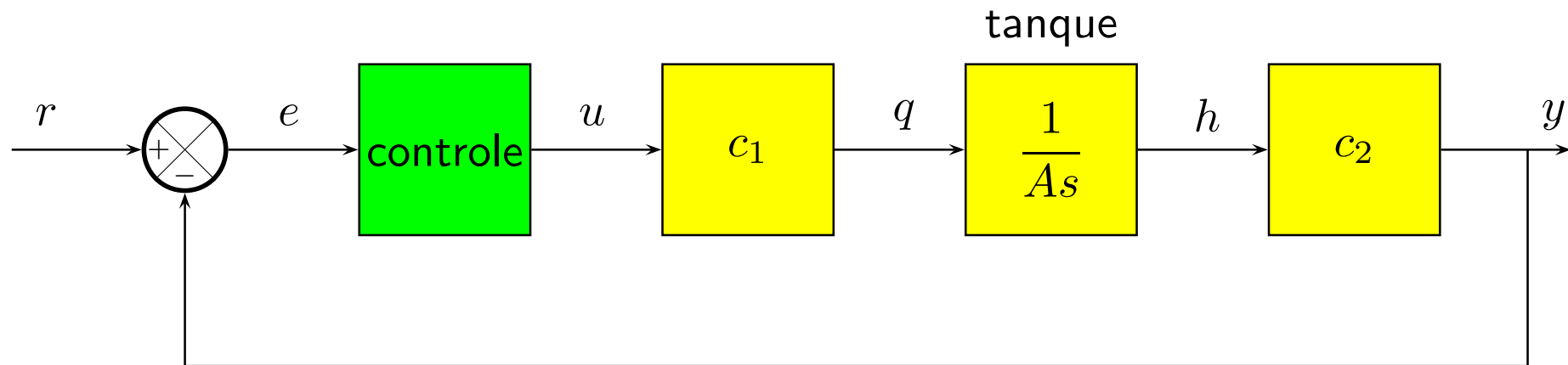
$$y = c_2 h$$

**Modelo do tanque :**

Volume :  $V$

Área :  $A$

$$V = A h = \int_0^t q dt \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{As} q}$$

**Diagrama de blocos :**

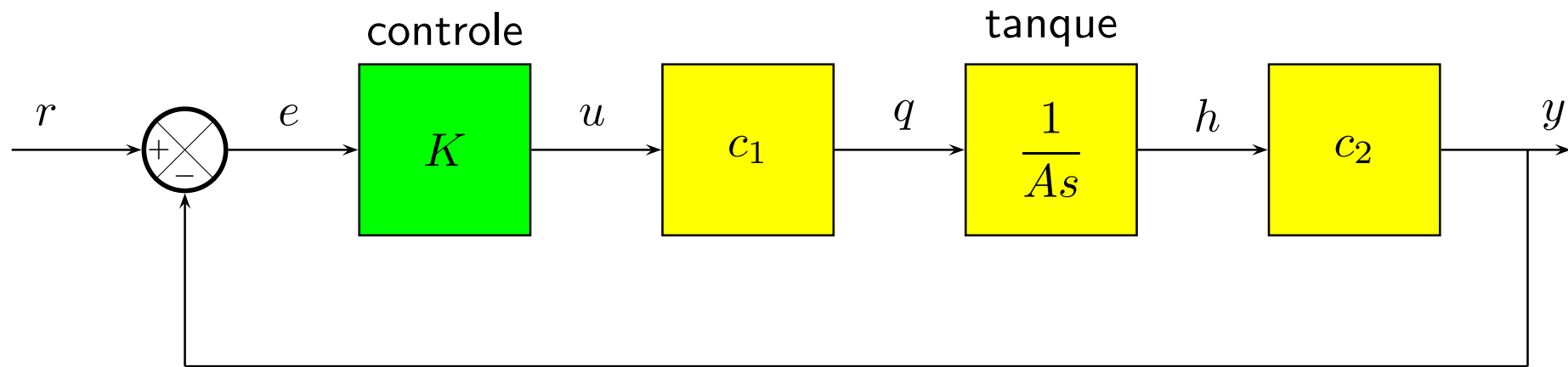
★ O tanque real é finito e **transborda** . O modelo não!

★ O tanque real **só pode encher** . O modelo também pode esvaziar!

Controle :

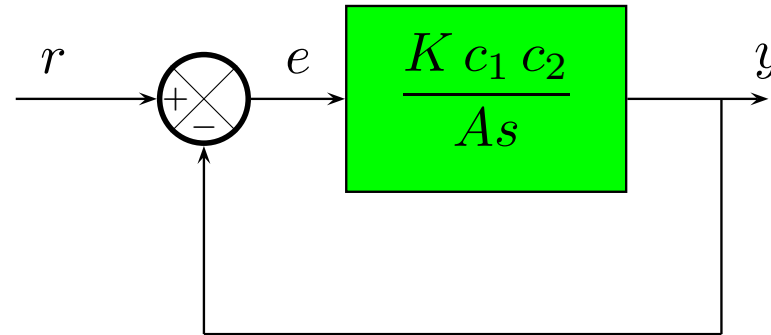
Controle proporcional :

$$u = K e$$

**Diagrama de blocos :**

★ Notação mista!

FT em malha fechada :



FT de malha fechada : 
$$H(s) = \frac{Kc_1c_2}{As + Kc_1c_2} = \boxed{\frac{1}{\tau s + 1}}$$

onde : 
$$\tau = \frac{A}{Kc_1c_2}$$

★  $K$  aumenta  $\Rightarrow \tau$  diminui.

Estabilidade :

FT de malha fechada :  $H(s) = \frac{Kc_1c_2}{As + Kc_1c_2} = \boxed{\frac{1}{\tau s + 1}}$

Condição para estabilidade assintótica:

$$\boxed{K > 0}$$

Erro de regime para entrada degrau unitário :

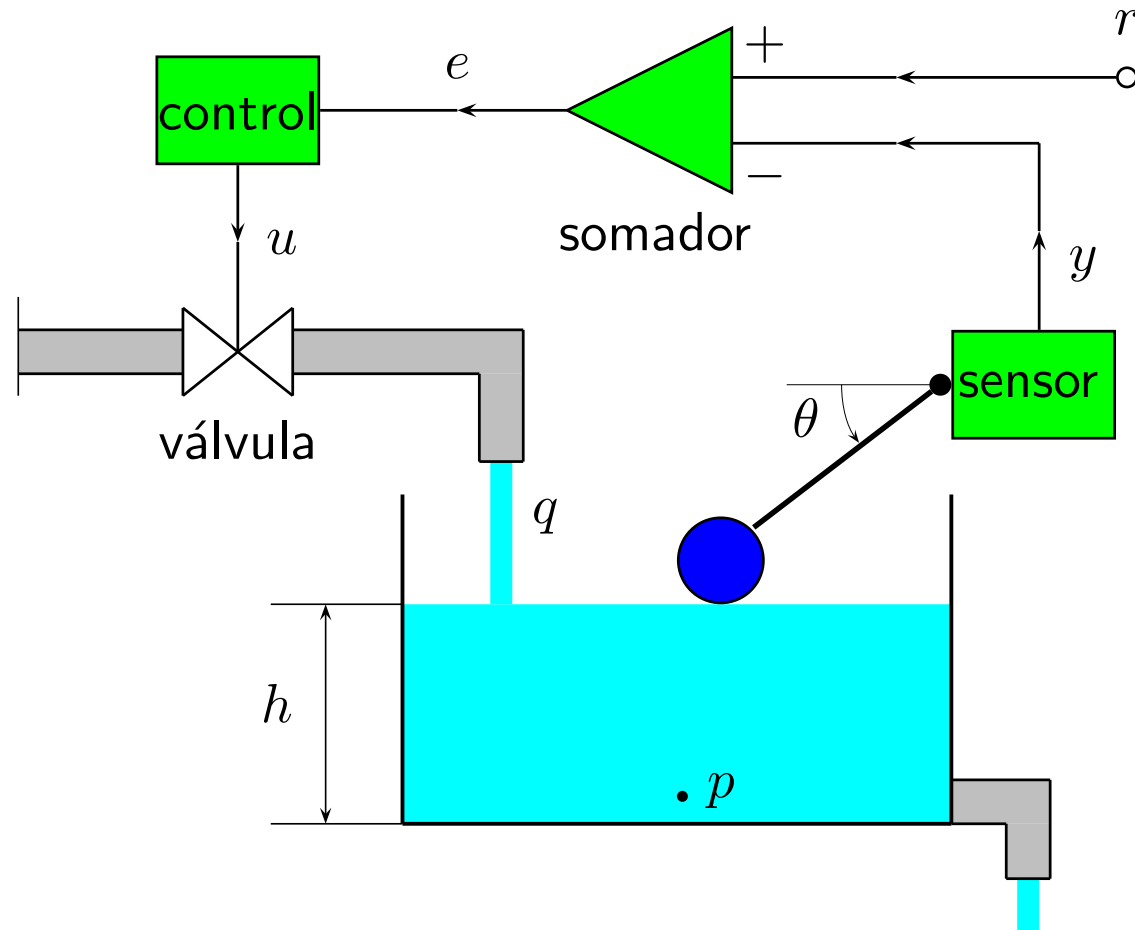
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s [1 - H(s)] R(s)$$

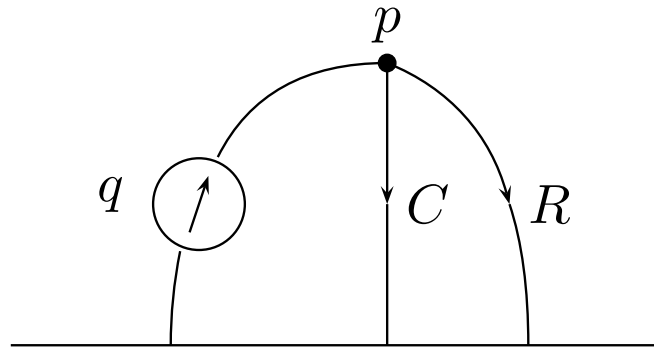
No sistema em questão :

$$e(\infty) = [1 - H(0)] = 0$$

**Exemplo 2**

## Controle de nível de tanque aberto.



**Modelo do tanque :**

Equação dos Nós :

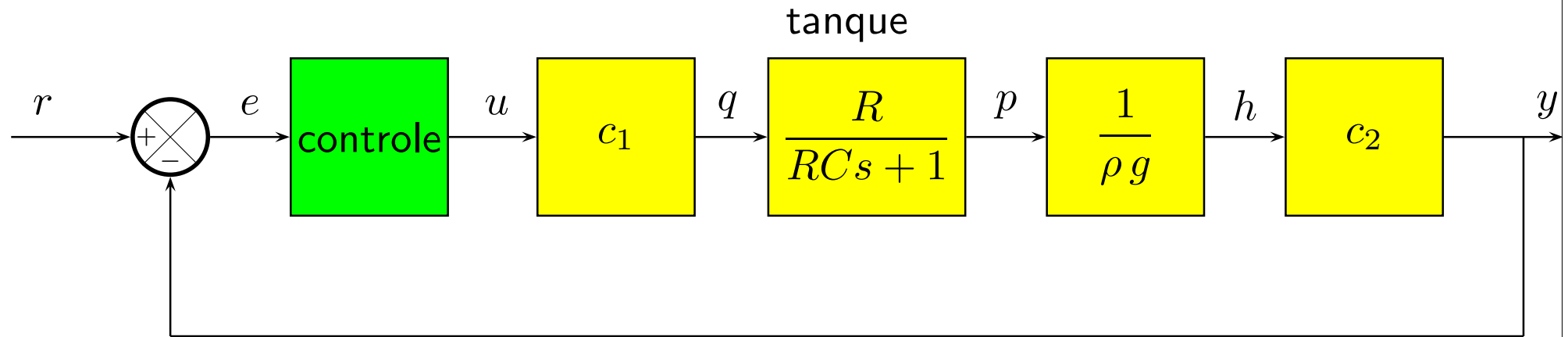
$$q = q_C + q_R$$

$$= C\dot{p} + \frac{p}{R}$$

Aplicando Laplace :

$$Q(s) = \left( Cs + \frac{1}{R} \right) P(s) \Rightarrow \boxed{P(s) = \frac{R}{RCs + 1} Q(S)}$$

Diagrama de blocos :



Simplificação :

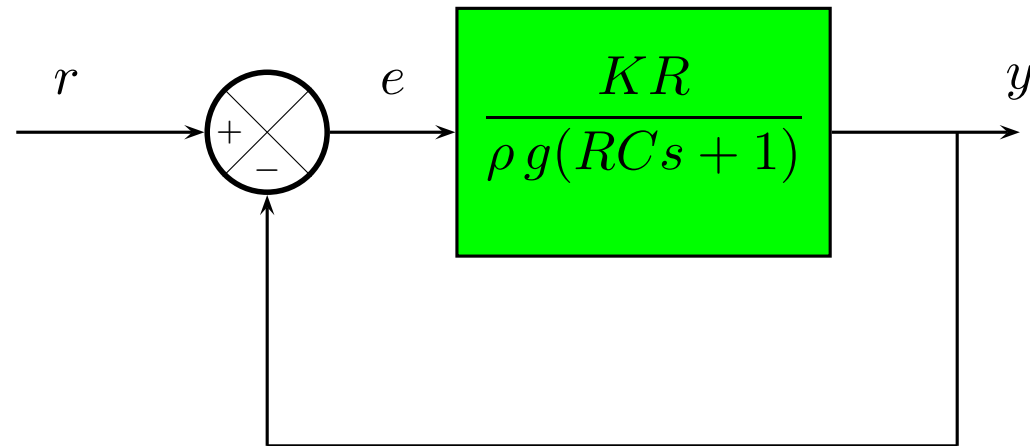
$$c_1 = c_2 = 1$$

Controle :

Controle proporcional :

$$u = K e$$

FT de malha fechada :



FT de malha fechada : 
$$H(s) = \frac{\frac{KR}{\rho g}}{RCs + 1 + \frac{KR}{\rho g}} = \boxed{\frac{k}{\tau s + 1}}$$

onde :

$$\tau = \frac{RC \rho g}{\rho g + KR}$$

$$k = \frac{KR}{\rho g + KR}$$

Estabilidade :

FT de malha fechada : 
$$H(s) = \frac{\frac{KR}{\rho g}}{RCs + 1 + \frac{KR}{\rho g}}$$

Condição para estabilidade assintótica:

$$1 + \frac{KR}{\rho g} > 0$$

ou melhor :

$$K > -\frac{\rho g}{R}$$

Erro de regime para entrada degrau unitário :

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s [1 - H(s)] R(s)$$

No sistema em questão :

$$e(\infty) = [1 - H(0)] = 1 - k$$

onde :

$$k = \frac{KR}{\rho g + KR}$$

★ Se  $K \rightarrow \infty \Rightarrow e(\infty) \rightarrow 0$

**Compromisso de projeto :**

★  $K$  grande  $\Rightarrow$  Erro de regime pequeno.

★  $K$  grande + saturação  $\Rightarrow$  Válvula opera em regime ON/OFF.

### 4.3 Controladores PID

- ★ A grande maioria dos controladores industriais é do tipo PID.
- ★ Atualmente, todos os PID's são implementados digitalmente.

**Vantagens :**

- (1) Simplicidade de sintonia
- (2) Bem conhecido pelos técnicos

Forma geral do PID :

$$u(t) = K \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(s) ds + T_d \dot{e}(t) \right]$$



Versão acadêmica.

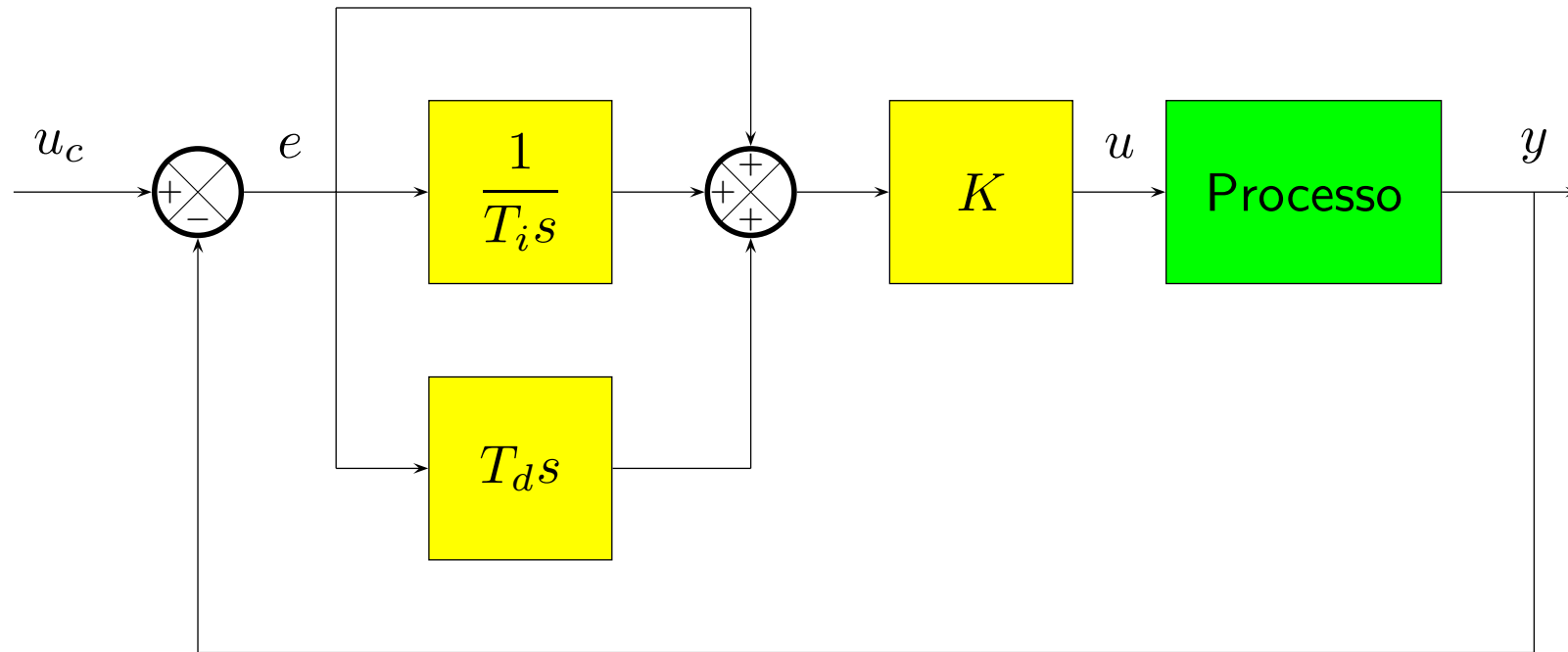


Figura 24: Diagrama de blocos do PID versão acadêmica.

**Nomenclatura** :

- $K$  — ganho proporcional
- $T_i$  — tempo integral ou de *reset*
- $T_d$  — tempo derivativo

**Modificação 1** : Eliminação de  $\dot{u}_c$ .

O termo derivativo pode ser escrito como:

$$T_d \dot{e} = T_d (\dot{u}_c - \dot{y})$$

**Problema** : Nos sistemas controlados por computador o *set-point*  $u_c$  é descontínuo.

Portanto, o sinal  $\dot{u}_c$  pode conter **impulsos**.

**Solução** : Eliminar o sinal  $\dot{u}_c$  da sinal de comando, i.e.,

$$T_d \dot{e} \rightarrow -T_d \dot{y}$$

**Modificação 2** : Substituição do termo  $T_d s$ .

**Problema** : A variável  $y$  é usualmente medida com ruído.

O termo derivativo  $-T_d \dot{y}$  não pode ser diretamente implementado devido aos problemas de **amplificação do ruído**.

**Solução** : Na prática utiliza-se a aproximação :

$$T_d s \approx \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$$

onde  $N$  é um parâmetro na faixa  $[3,20]$ .

Note que,

$$\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} = \frac{N}{\frac{N}{T_d s} + 1} \rightarrow N \quad \text{quando} \quad \omega \rightarrow \infty$$

Quer dizer,  $N$  é o limite de amplificação do ruído.

**Modificação 3** : Redução do termo proporcional.

**Problema** : Em certas aplicações um erro proporcional  $e = u_c - y$  muito grande pode causar *overshoot* inaceitável.

**Solução** : Reduzir o erro proporcional introduzindo-se o parâmetro  $b$ , i.e.,

$$u_c - y \rightarrow bu_c - y \quad b < 1$$

- ★ O parâmetro  $b$  diminui o efeito de variações bruscas de  $u_c$ .
- ★ O erro de regime deve ser compensado pelo termo integral.

Uma versão prática do PID é :

$$u = K \left[ bu_c - y + \frac{1}{T_i s} e - \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} y \right]$$

★ Existem muitas outras variantes que não serão discutidas aqui.

## 4.4 Efeito do termo integral

(...)

**Exemplo 3**

Efeito do termo integral.

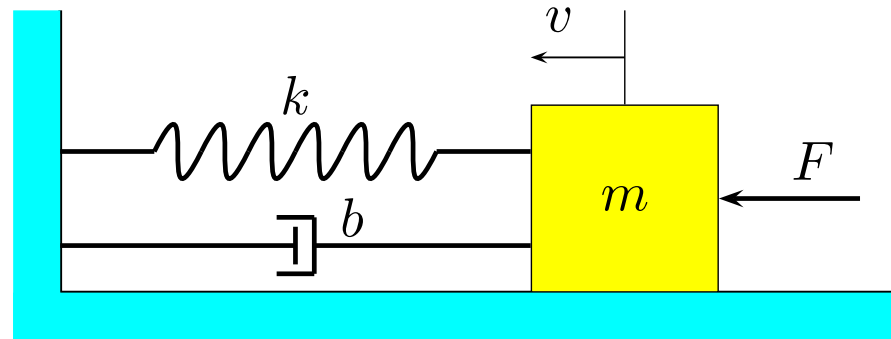


Figura 25: Sistema massa-mola-atrito.

(...)

## 4.5 Efeito do termo derivativo

(...)

**Exemplo 4**

Efeito do termo derivativo.

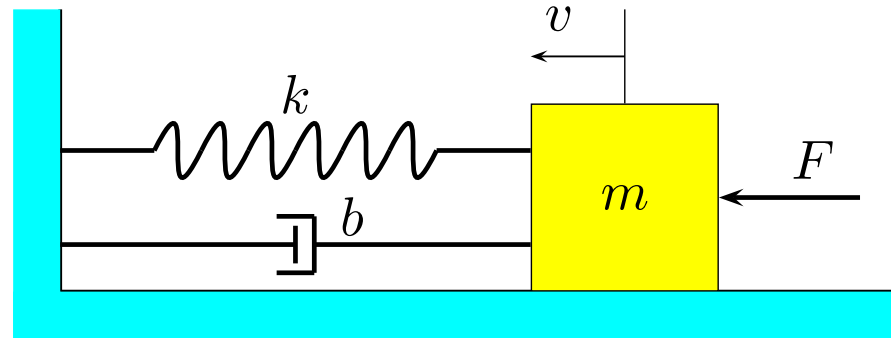


Figura 26: Sistema massa-mola-atrito.

(...)