

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Prof. Ramon

Organização do curso

Sala de aula : H-211

Horário : 2^a. feira 13:00 – 16:00
: 4^a. feira 15:00 – 17:00

Atendimento : 4^a. feira 10:00 – 12:00

Professor : Ramon R. Costa

Laboratório : H-345

Telefone : 2562-8604

e-mail : ramon@coep.ufrj.br

Homepage : <http://www.coep.ufrj.br/~ramon>

: <http://www.coep.ufrj.br/~teleduc>

Pré-requisitos

★ Sistemas Lineales I

Objetivos do curso

- ★ Estudo de ferramentas e métodos para análise de sistemas lineares invariantes no tempo.
- ★ Ênfase em sistemas discretos.

Descrição do curso

Parte I - Sistemas contínuos

1. Revisão: Sistemas lineares
2. Representação no espaço de estado
3. Realização de funções de transferência
4. Linearização
5. Solução da equação de estado
6. Revisão: Álgebra linear
7. Análise
8. Solução numérica de EDOs

Descrição do curso

Parte II - Sistemas discretos

8. Sinais e sistemas discretos no tempo
9. Amostragem de sinais contínuos
10. Revisão: Transformada de Laplace
11. Transformada Z
12. Análise de sistemas lineares discretos
13. Transformada de Fourier
14. Transformada discreta de Fourier (DFT)
15. Fast Fourier Transform (FFT)

Duração do curso

Início : 02/ago

Término : 10/dez

★ 75 horas-aula

Plano de aulas simplificado

Parte I - Sistemas contínuos

1. Revisão: Sistemas Lineares 1 aulas
2. Representação no espaço de estado 5 aulas
3. Realização de funções de transferência 5 aulas
4. Revisão: Álgebra Linear 2 aulas
5. Solução da equação de estado 5 aulas
6. Análise 10 aulas
7. Simulação de sistemas dinâmicos 5 aulas

TOTAL : 33 aulas

Plano de aulas simplificado

Parte II - Sistemas discretos

1. Sinais e sistemas discretos no tempo 5 aulas
2. Equações a diferenças 5 aulas
3. Revisão: Transformada de Laplace 2 aulas
4. Transformada Z 5 aulas
5. Análise de sistemas lineares discretos 10 aulas
6. Transformada de Fourier 5 aulas
7. Transformada discreta de Fourier (DFT) 5 aulas
8. Fast Fourier Transform (FFT) 5 aulas

TOTAL : 42 aulas

Em resumo ...

Pouco tempo pra brincadeira !

Exercícios & trabalhos

Durante o curso os alunos receberão:

- 6 listas de exercícios
 - 2 trabalhos/projetos
- ★ Poderão requerer a utilização do pacote **MATLAB** e seus toolboxes.
- ★ **Não serão considerados para avaliação.**
- Os alunos serão poupados da tarefa de copiá-los.

Avaliação

- ★ Serão aplicadas 4 provas .
- ★ Todas as provas são sem consulta .
- ★ Para aprovação no curso o aluno devera ter média final ≥ 5 .
- ★ Será dada uma única 2a. chamada no final do curso com toda a matéria .

Datas das provas

Prova	Peso	Data
1a.	1	08/set/2004
2a.	1	04/out/2004
3a.	1	/nov/2004
4a.	1	/dez/2004
2a. cham.	1	/dez/2004

Período letivo : 02/agosto a 10/dezembro

Livros textos

- [1] C. T. Chen ,
Linear Systems Theory and Design ,
3rd Edition, Oxford , 1999.
- [2] K. Ogata ,
Modern Control Engineering ,
3rd Edition, Prentice Hall , 1997.
- [3] B. C. Kuo ,
Automatic Control Systems ,
7th Edition, Prentice Hall , 1995.
- [4] A. Oppenheim & R. Schafer ,
Discrete Time Signal Processing ,
Prentice Hall , 1989.

Bibliografia complementar

- [1] Paulo S. R. Diniz & Eduardo A. B. da Silva & Sergio L. Netto ,
Digital signals processing: system analysis and design ,
Cambridge University Press , 2002.
- [2] J. Proakis & D. Manolakis ,
Digital Signal Processing ,
Prentice Hall , 1996.
- [3] Oppenheim & Willsky ,
Signals and Systems ,
2nd Edition, Prentice Hall , 1997.
- [4] H. Waldman & Kapelusz ,
Processamento de Sinais Digitais , 1987.

Bibliografia complementar

- [5] Karl J. Åström & Björn Wittenmark ,
Computer Controlled Systems ,
3rd Edition, Prentice–Hall , 1997.
- [6] Gene Franklin & J. David Powell & Michael L. Workman ,
Digital Control of Dynamic Systems ,
Addison–Wesley , 1990.
- [7] Charles L. Phillips & H. Troy Nagle ,
Digital Control Systems Analysis & Design ,
3rd Edition, Prentice–Hall , 1995.

Bibliografia complementar

- [8] **B. C. Kuo** ,
Digital Control Systems ,
Saunders , 1992.
- [9] **C. T. Chen** ,
Analog & Digital Control System Design ,
Saunders , 1993.
- [10] **K. Ogata** ,
Discrete Control Systems ,
2nd Edition, Prentice–Hall , 1995.

Resumo do conteúdo do curso

1. ...
2. ...
3. ...
4. ...
5. ...

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 1

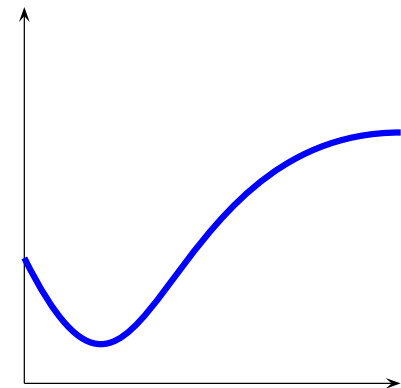
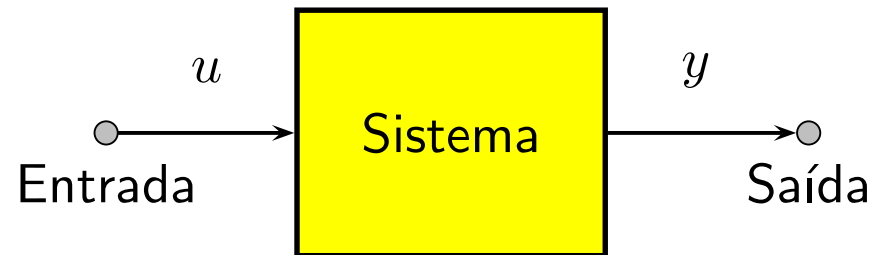
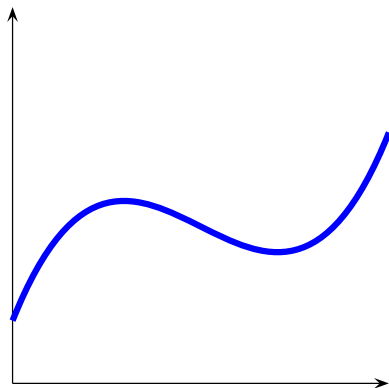
1 Revisão: Sistemas Lineares

Conteúdo

1. Introdução
2. Equações diferenciais ordinárias (EDOs)
3. Resposta ao impulso
4. Transformada de Laplace
5. Função de Transferência
6. Diagrama de blocos
7. Exercícios

1.1 Introdução

Nossa visão de sistema : algo com terminais de entrada e saída.



Classificação de sistemas :

Lineares

Não lineares

Contínuos

Discretos

Invariantes

Variantes no tempo

SISO

MIMO

Determinísticos

Estocásticos

Neste curso :

- ★ Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) .
- ★ Sistemas discretos lineares invariantes no tempo (SDLIT) .

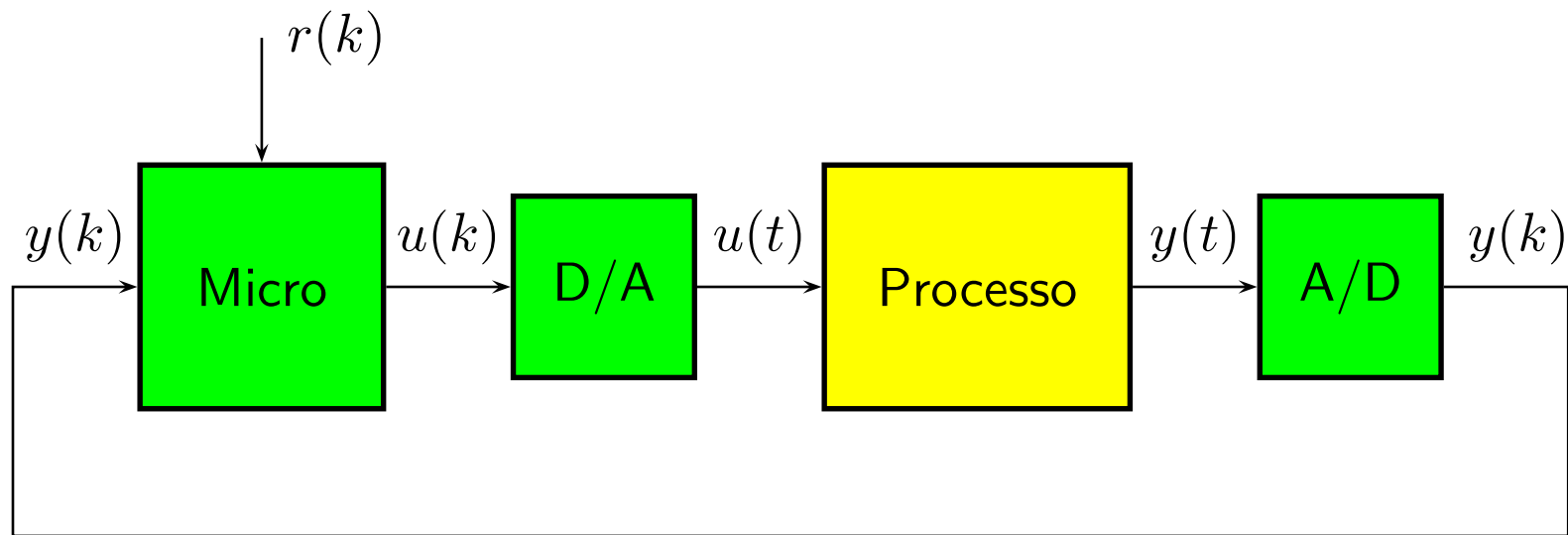
Exemplo 1 Sistema discreto (ou melhor, digital)

Figura 1: Sistema discreto.

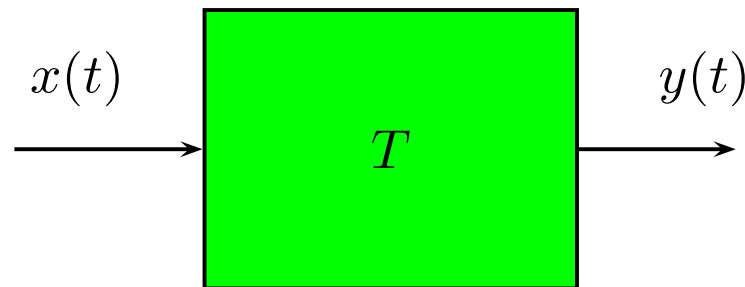
Motivação

- ★ Controlar um sistema significa impor certas propriedades aos seus sinais de saída como, por exemplo, *overshoot*.
- ★ A entrada é o sinal que pode ser livremente manipulado.
- ★ É necessário um modelo do sistema para se poder calcular o sinal de controle necessário para se impor as propriedade desejadas à saída.
- ★ Estratégias adequadas de controle permitem obter bom desempenho mesmo com um modelo impreciso do sistema.
- ★ ...

Representação

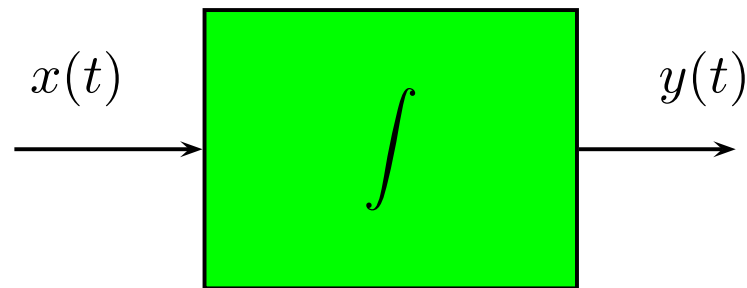
Um sistema é definido matematicamente como uma transformação ou operador :

$$y(t) = T\{x(t)\}$$



Exemplo 2 Integrador

$$y(t) = \int_0^t x(\zeta) d\zeta$$



Considere 2 sinais de entrada distintos :

$$y_1(t) = T\{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = T\{x_2(t)\}$$

Propriedade (*Aditividade*)

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)$$

Propriedade (*Homogeneidade*)

$$T\left\{ax_i(t)\right\} = aT\left\{x_i(t)\right\} = ay_i(t)$$

Combinando-se estas 2 propriedades, tem-se o ...

Princípio da superposição

$$T\left\{a x_1(t) + b x_2(t)\right\} = a y_1(t) + b y_2(t)$$

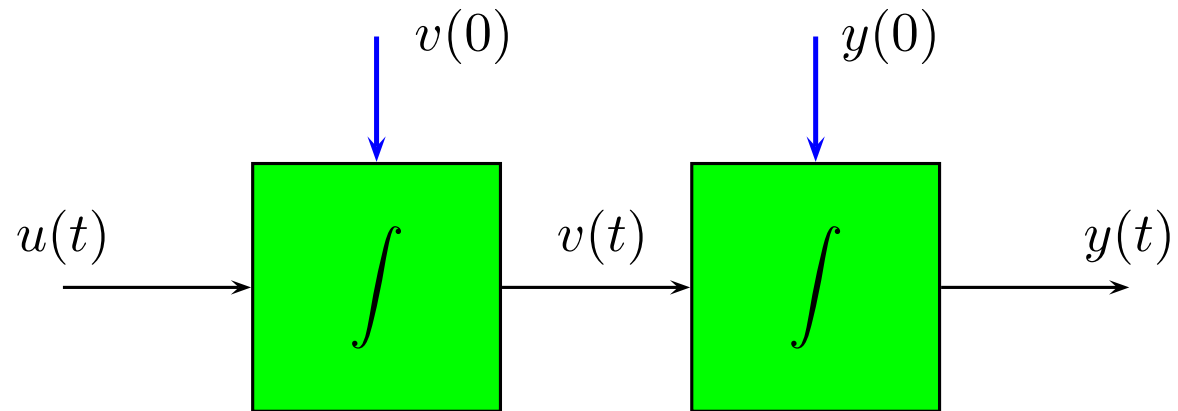
Propriedade *(Linearidade)*

A classe de sistemas que satisfaz o princípio da superposição é dito **linear**.

- ★ Nos **sistemas dinâmicos**, a resposta à **condição inicial** também deve satisfazer o princípio da superposição.

Exemplo 3

Duplo integrador.



É fácil verificar que se para $u_1(t)$, $v_1(0)$ e $y_1(0)$:

$$y_1(t) = \int_0^t \left(\int_0^t u_1(\tau) d\tau + v_1(0) \right) d\zeta + y_1(0)$$

e para $u_2(t)$, $v_2(0)$ e $y_2(0)$:

$$y_2(t) = \int_0^t \left(\int_0^t u_2(\tau) d\tau + v_2(0) \right) d\zeta + y_2(0)$$

então

$$y_1(t) + y_2(t) = \int_0^t \left(\int_0^t [u_1(\tau) + u_2(\tau)] d\tau + [v_1(0) + v_2(0)] \right) d\zeta + [y_1(0) + y_2(0)]$$

★ O sistema é linear.

Exemplo 4 Sistema não-linear.

Oscilador de Van der Pol :

$$\ddot{y} - \dot{y} - \theta \dot{y}^3 + y = 0$$

Propriedade (*Invariância no tempo*)

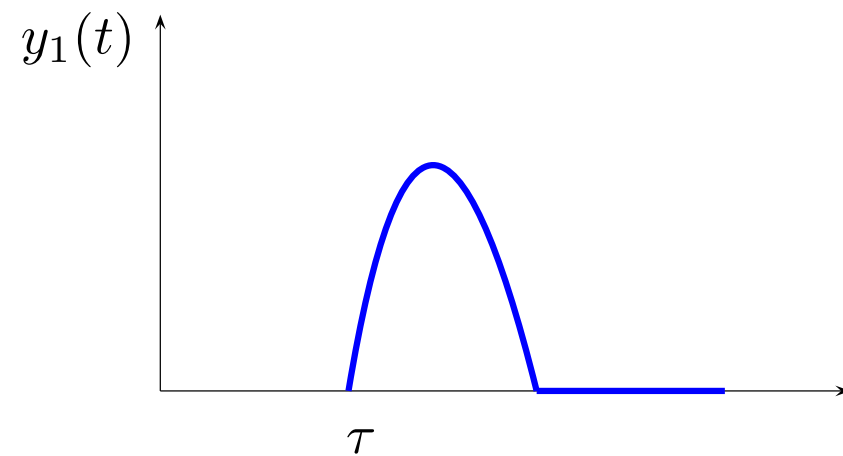
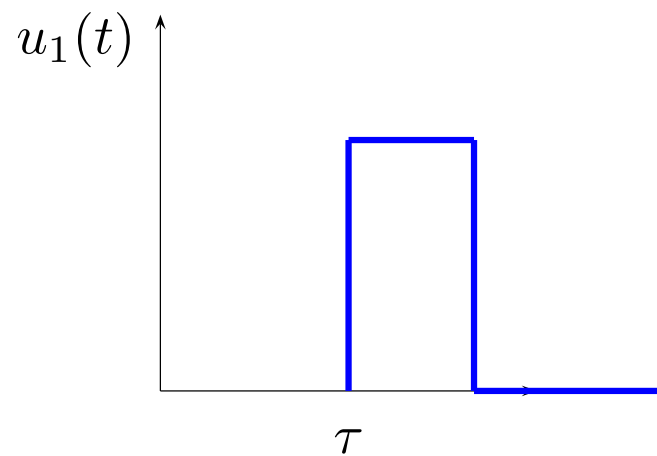
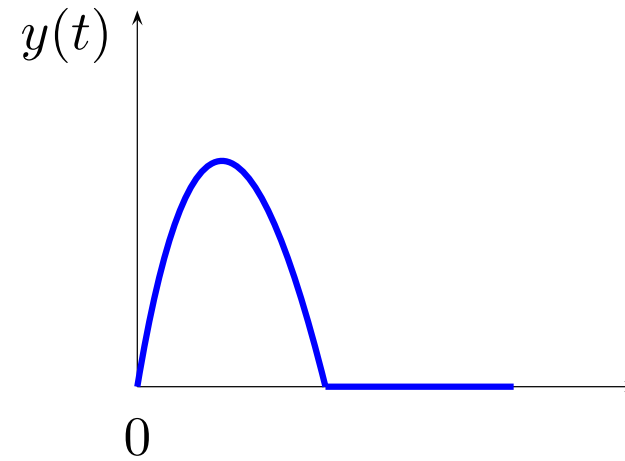
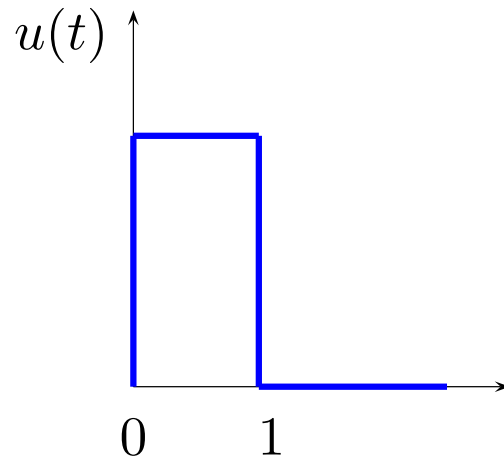
Um sistema é dito **invariante no tempo** se, $\forall \tau$,

a entrada

$$x_1(t) = x(t - \tau)$$

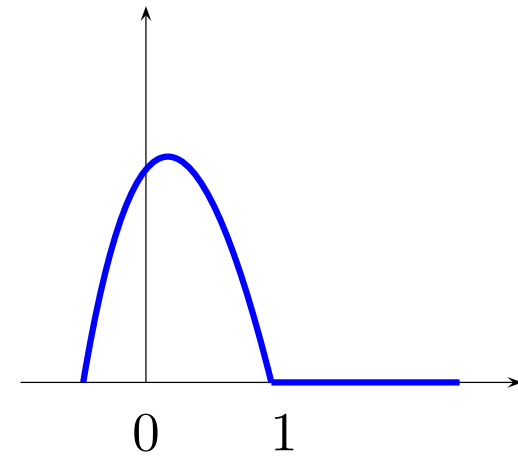
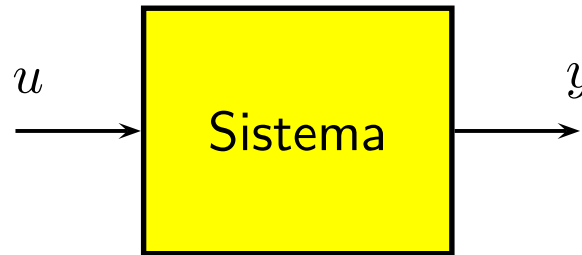
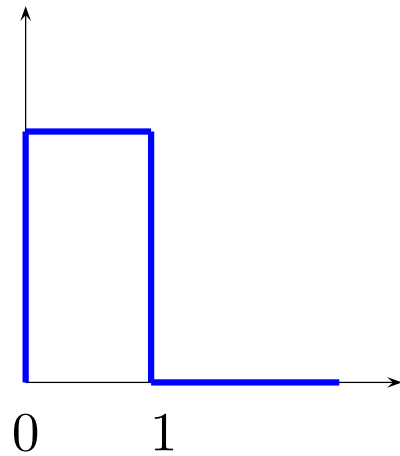
produz a saída

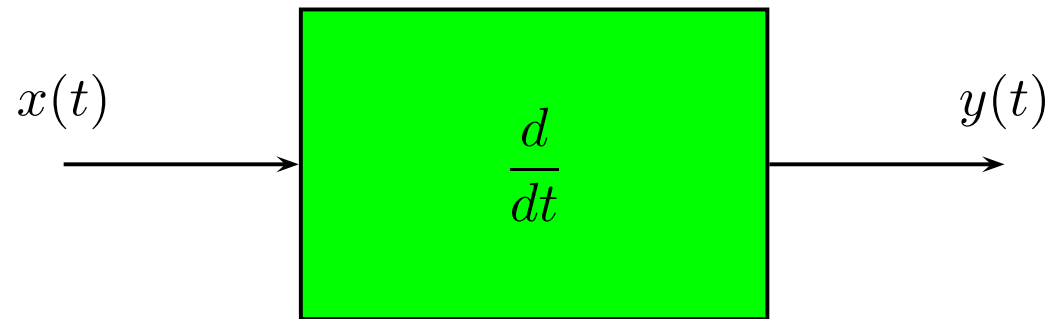
$$y_1(t) = y(t - \tau) .$$

Exemplo 5 Sistema invariante.

Propriedade (*Causalidade*)

Um sistema é dito **causal** se a sua saída atual depende somente das entradas atuais e passadas, i.e., não depende das entradas futuras.

Exemplo 6 Sistema não causal.

Exemplo 7 Sistema diferenciador.

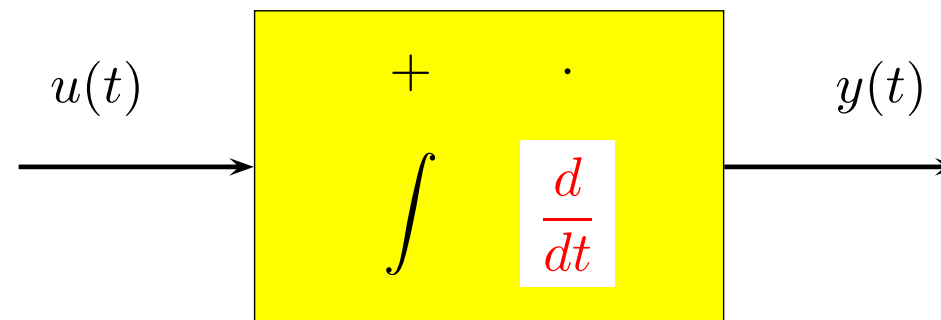
★ A diferenciação (on line) não é uma operação causal.

Exemplo 8 Sistema não causal discreto.

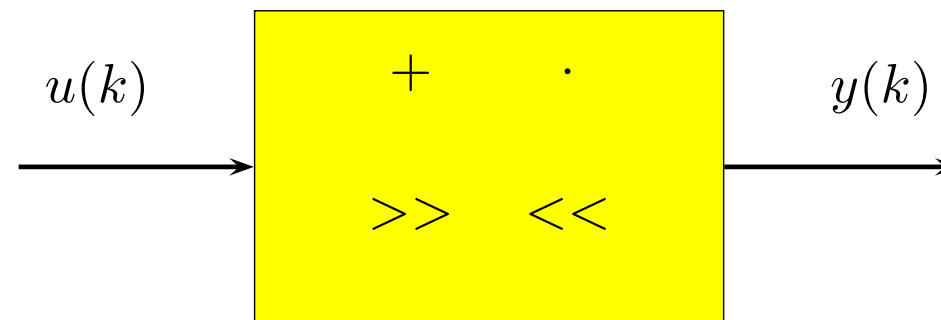
$$y[k] = 0.2 y[k - 1] + 0.5 y[k - 2] + u[k] - u[k + 1]$$

- ★ Exemplo de uma equação a diferenças (equação recursiva).
- ★ A saída atual depende do valor futuro do sinal de entrada $u[k + 1]$.

Interpretação de um SLIT



Interpretação de um SDLIT



1.2 Equações diferenciais ordinárias (EDO)

Forma geral :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

★ EDO linear de ordem n .



Causalidade $\Leftrightarrow n \geq m$.



Modelo temporal .

Operador diferencial

Definição

$$p = \frac{d}{dt}$$

Notação simplificada :

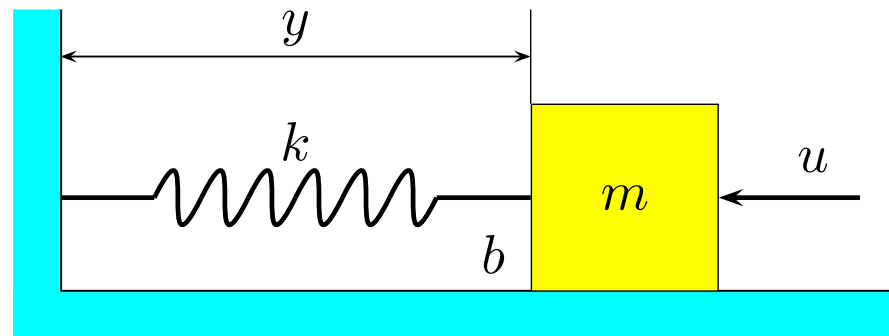
$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right) y(t) = \\ \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \right) u(t)$$

ou melhor,

$$A(p) y(t) = B(p) u(t)$$

Exemplo 9

Sistema mecânico massa-mola-atrito.



A posição da massa m é descrita pela EDO de 2a. ordem

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = u$$

onde :
 m = massa
 b = coeficiente de atrito
 k = constante de mola

Usando o operador diferencial :

$$\left(m p^2 + b p + k \right) y = u$$

1.3 Resposta ao impulso



Modelo temporal :

$g(t)$ = resposta ao impulso.

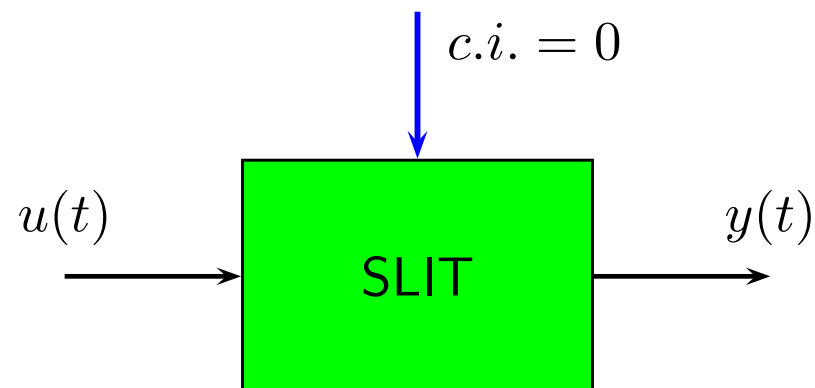


Figura 2: Resposta com condições iniciais nulas.

A resposta a uma entrada $u(t)$ é dada pela **integral de convolução** :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

★ $g(t)$ = resposta do sistema com condições iniciais nulas a um impulso aplicado em $t = 0$.

★ A convolução é **comutativa** :

$$y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$$

Exemplo 10

Sistema mecânico massa-mola-atrito.

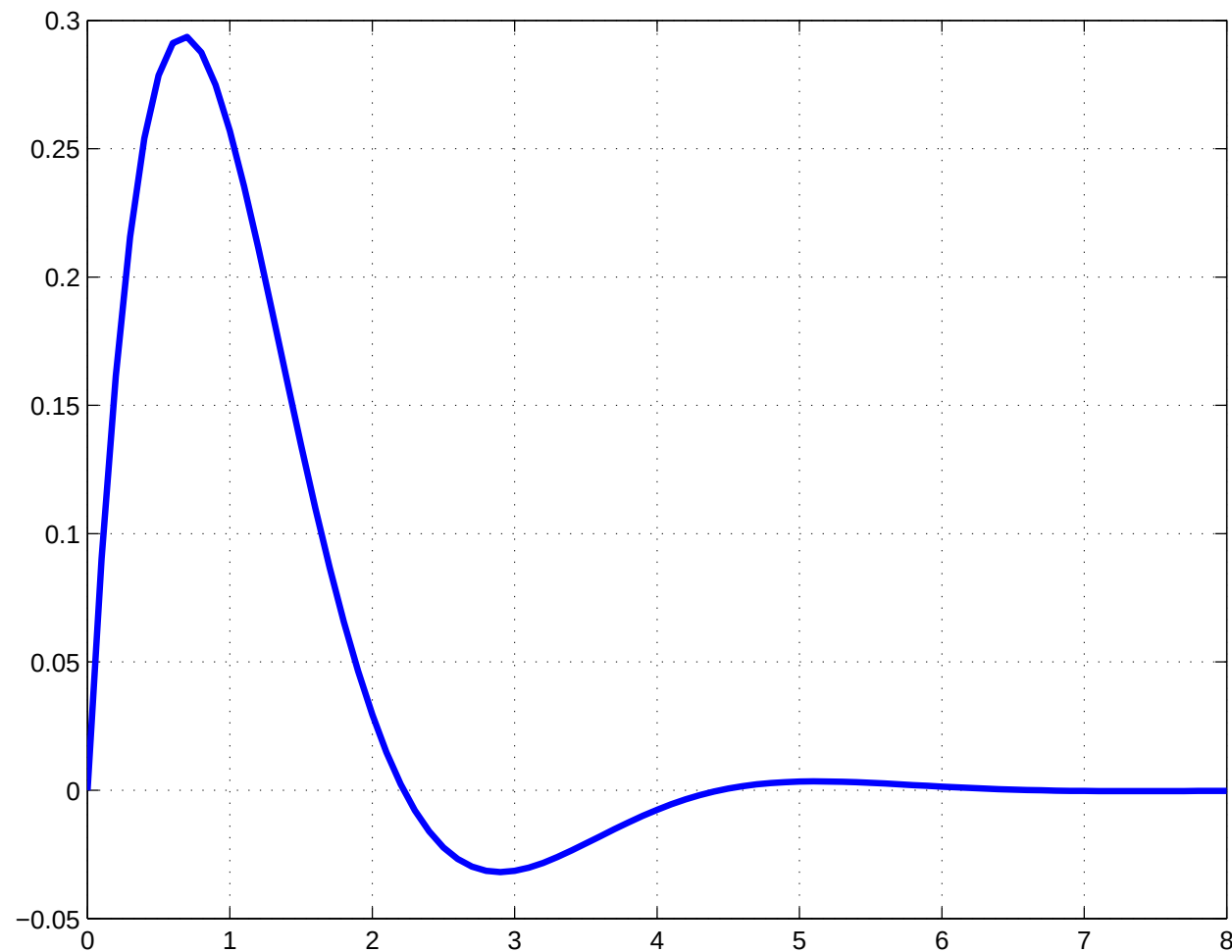


Figura 3: Resposta ao impulso. Simulação usando Matlab. Script **rimpulso.m**.

1.4 Transformada de Laplace

- ★ Útil na **solução analítica** de equações diferenciais ordinárias (EDOs).
- ★ Reduz uma EDO (no domínio temporal) a uma equação algébrica (no domínio complexo).

Definição (*Transformada de Laplace*)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

★ $s =$ variável complexa .

Exemplo 11

Função exponencial.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ k e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace : $F(s) = \mathcal{L}[k e^{-at}]$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} k e^{-at} e^{-st} dt \\ &= k \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \frac{k}{s+a} \end{aligned}$$

Propriedades

$$(1) \quad \mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)]$$

$$(2) \quad \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

★ A Transformada de Laplace é **linear**.

Teorema (*Diferenciação*)

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

★ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

★ $f(0)$ é a condição inicial de $f(t)$.

Teorema (*Integração*)

$$\mathcal{L} \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

Teorema (*Valor final*)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

★ Sólo se aplica se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ **existir**.

Teorema (*Convolução*)

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)F_2(s)$$

Transformada inversa

Metodologia :

1. Determinar a expansão em frações parciais
2. Consultar tabelas de transformadas

Metodologia alternativa :

1. Usar o MATLAB

Expansão em frações parciais

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s + p_1} + \frac{r_2}{s + p_2} + \dots + \frac{r_n}{s + p_n}$$

★ $r_i =$ resíduos .

★ $p_i =$ pólos .

★ O caso geral envolve pólos múltiplos .

Tabela

(Vide Ogata. pag. 22 e 23)

Exemplo 12 Transformada de Laplace usando MATLAB.

Encontrar a transformada de :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ k e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Solução :

```
>> syms t s a k  
>> f = k*exp(-a*t);  
>> F = laplace(f)
```

F =

k/(s+a)

```
>> _
```

Exemplo 13 Anti-transformada de Laplace usando MATLAB.

Encontrar a anti-transformada de :

$$F(s) = \frac{k}{(s+a)^2}$$

Solução :

```
>> syms t s a k  
>> F = k/(s+a)^2;  
>> f = ilaplace(F)
```

f =

k*t*exp(-a*t)

```
>> _
```

1.5 Função de transferência

Considere uma EDO :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Hipótese : Todas as condições iniciais são nulas.

Aplicando-se a Transformação de Laplace em ambos os lados,

$$\left[s^n + \cdots + a_1 s + a_0 \right] Y(s) = \left[b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0 \right] U(s)$$

Defini-se a **Função de Transferência** como :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

★ Ordem n .

★ Causalidade $\Leftrightarrow n \geq m$.

★ **Modelo freqüencial** .

Notação simplificada :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

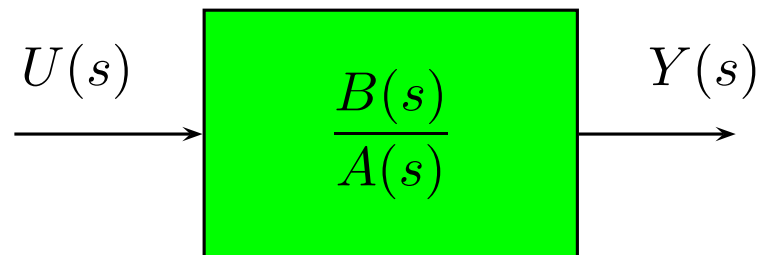
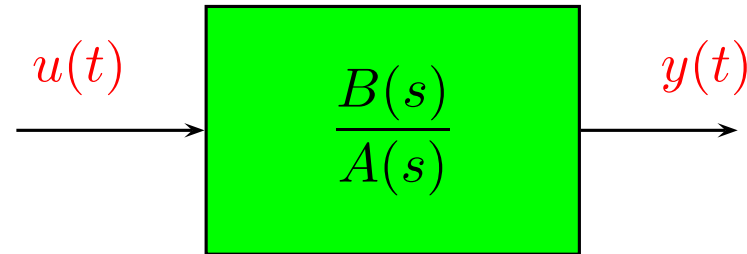


Figura 4: Função de transferência.

Notação mista

★ Pode ser encontrada na literatura.

★ A variável s deve ser interpretada como o operador diferencial $\frac{d}{dt}$.

- ★ Função racional em s .
- ★ $G(s)$ só depende do sistema.
- ★ $G(s)$ só é definida para SLITs.
- ★ O conhecimento de $G(s)$ permite calcular $y(t)$ para qualquer sinal $u(t)$.
- ★ $G(s)$ pode ser determinada experimentalmente.

Exemplo 14 Sistema massa-mola-atrito.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$

Aplicando Laplace :

$$s^2Y + 2sY + 3Y = U$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

Exemplo 15

Funções de transferência usando MATLAB.

```
>> num = [1];           % polinômio numerador  
>> den = [ 1 2 3 ];     % polinômio denominador  
>>  
>> G = tf(num,den)
```

Transfer function:

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

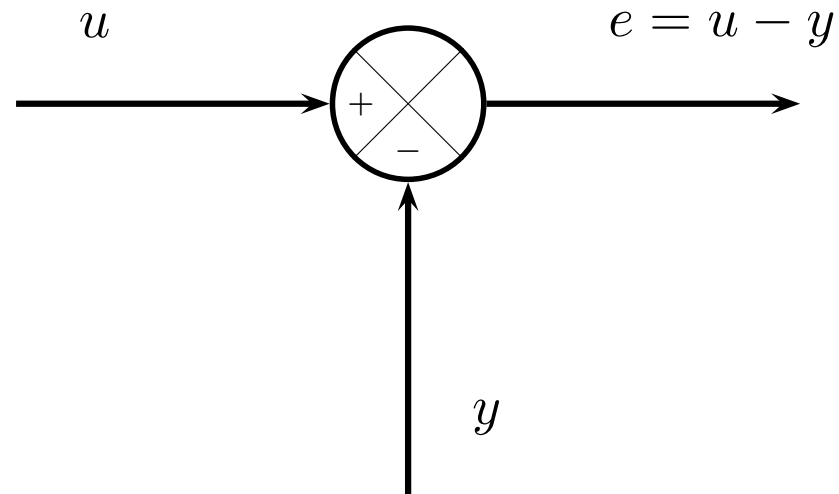
```
>> _
```

1.6 Diagramas de blocos

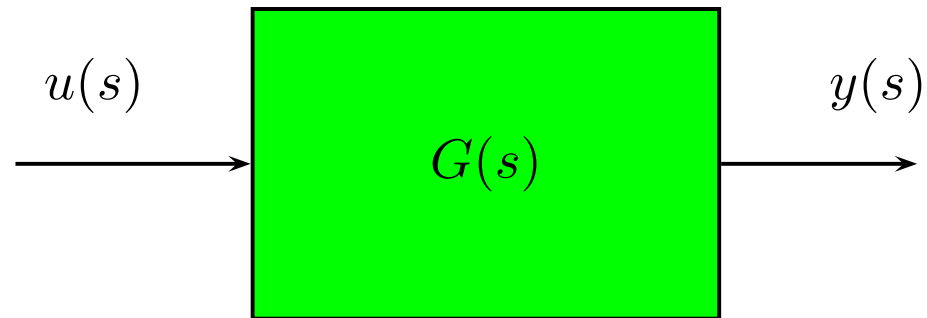
Servem para :

- ★ Visualização de sistemas complexos .
- ★ Visualização de conexões e fluxos de sinais .

Elementos : Setas/sinais
 Somadores
 Ganhos/FTs

Somador

Ganho/FT



Exemplo 16

Sistema em malha fechada.

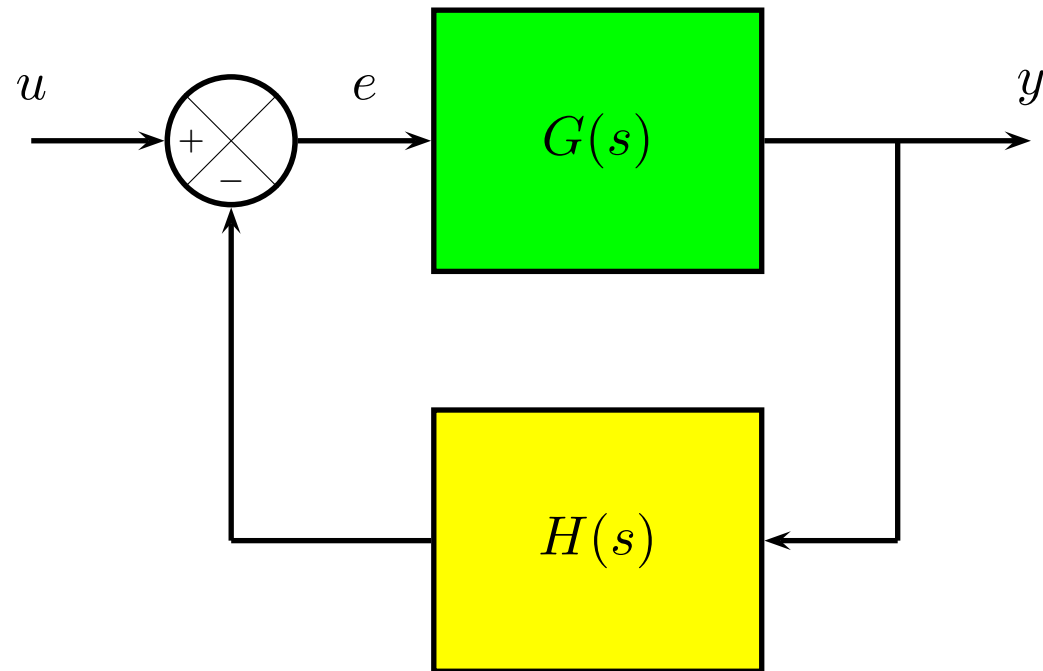


Figura 5: Diagrama de blocos de sistema em malha fechada.

Determinação da **FT em malha fechada** :

Do diagrama tiramos :

$$y = G \, e$$

$$e = u - H \, y$$

Eliminando o erro e :

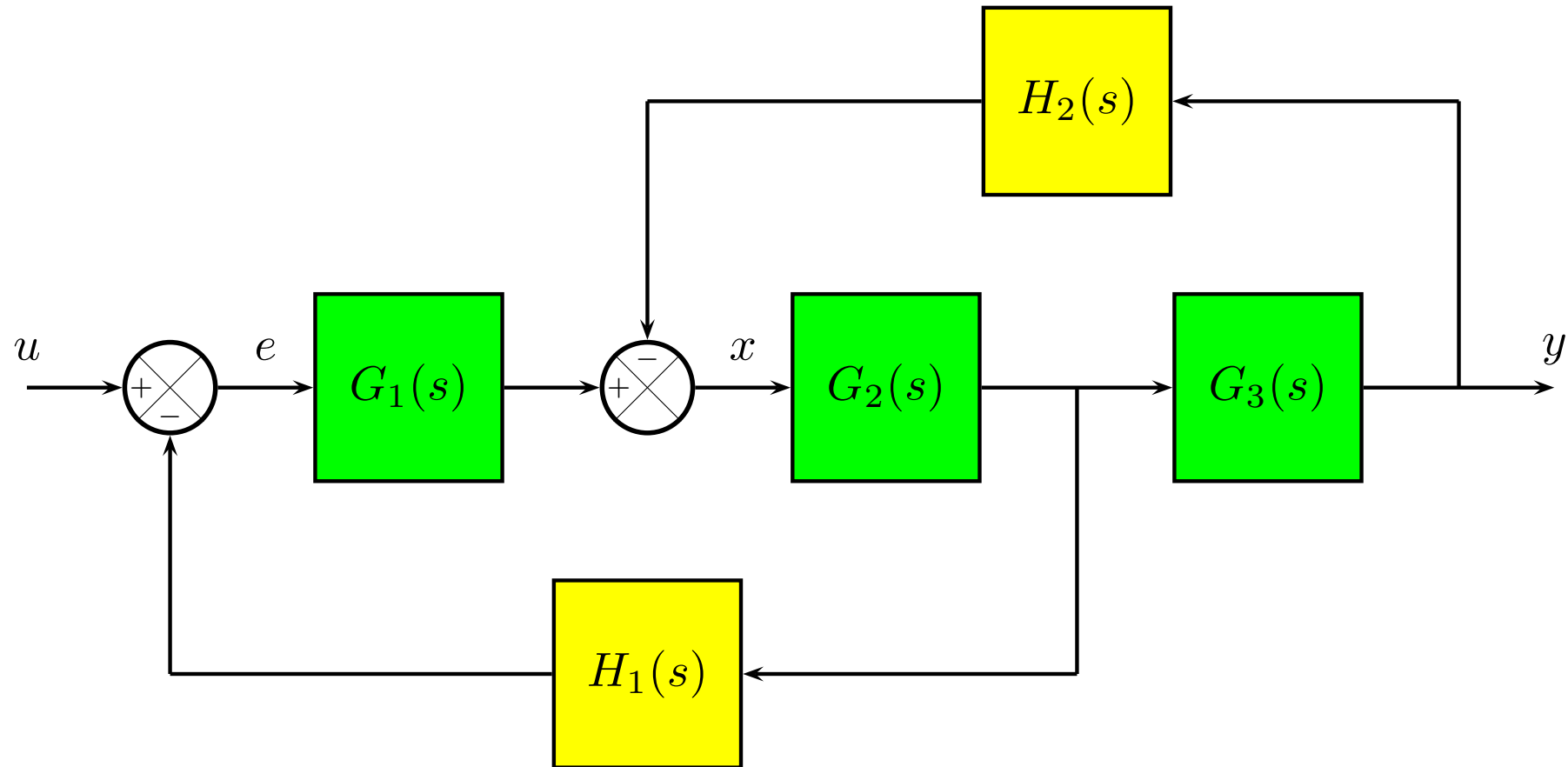
$$\begin{aligned} y &= G(u - H y) \\ &= G u - G H y \end{aligned}$$

Portanto :

$$(1 + GH)y = G u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G}{1 + GH}}$$

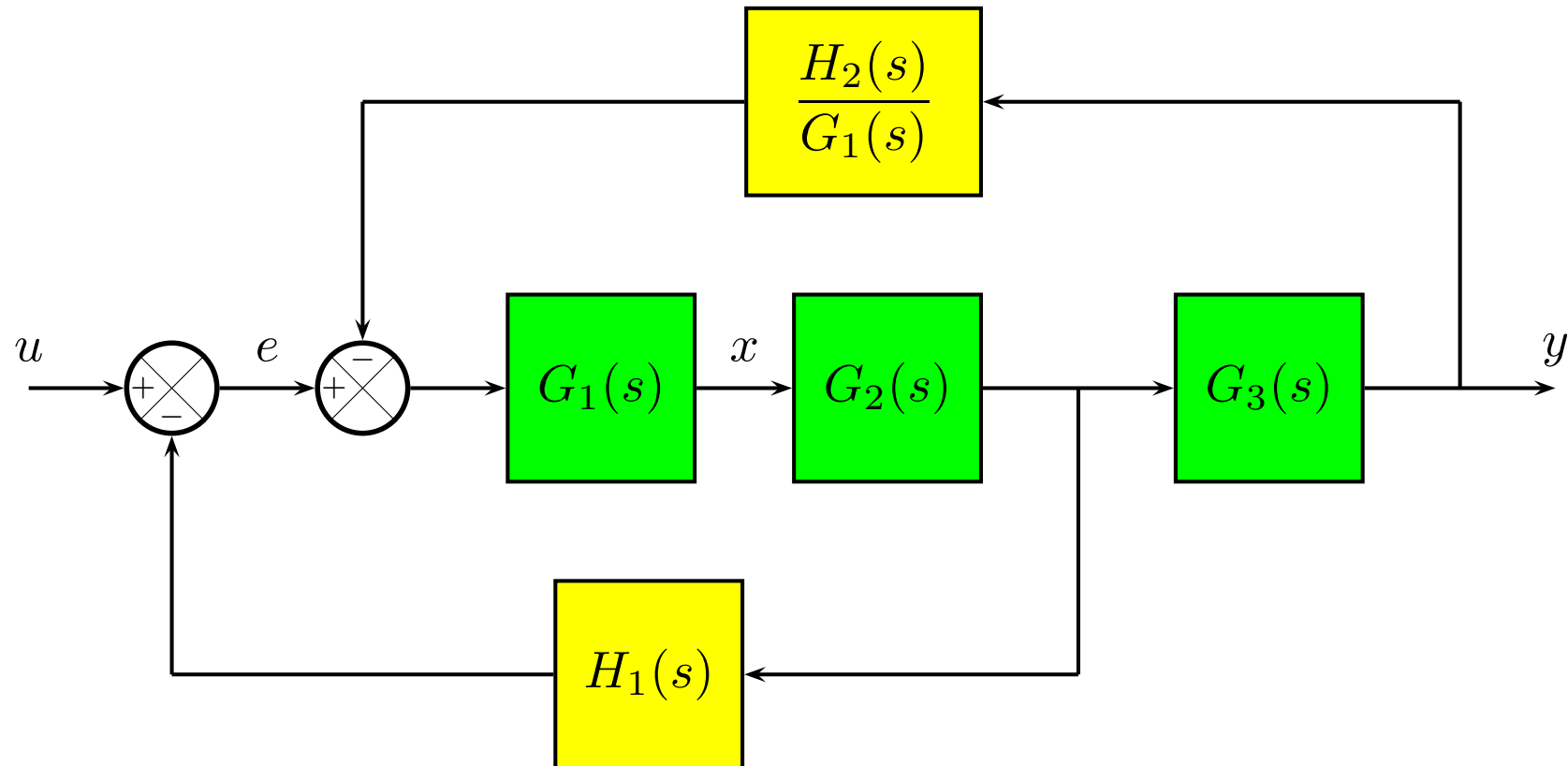
Exemplo 17

Sistema em malha fechada.



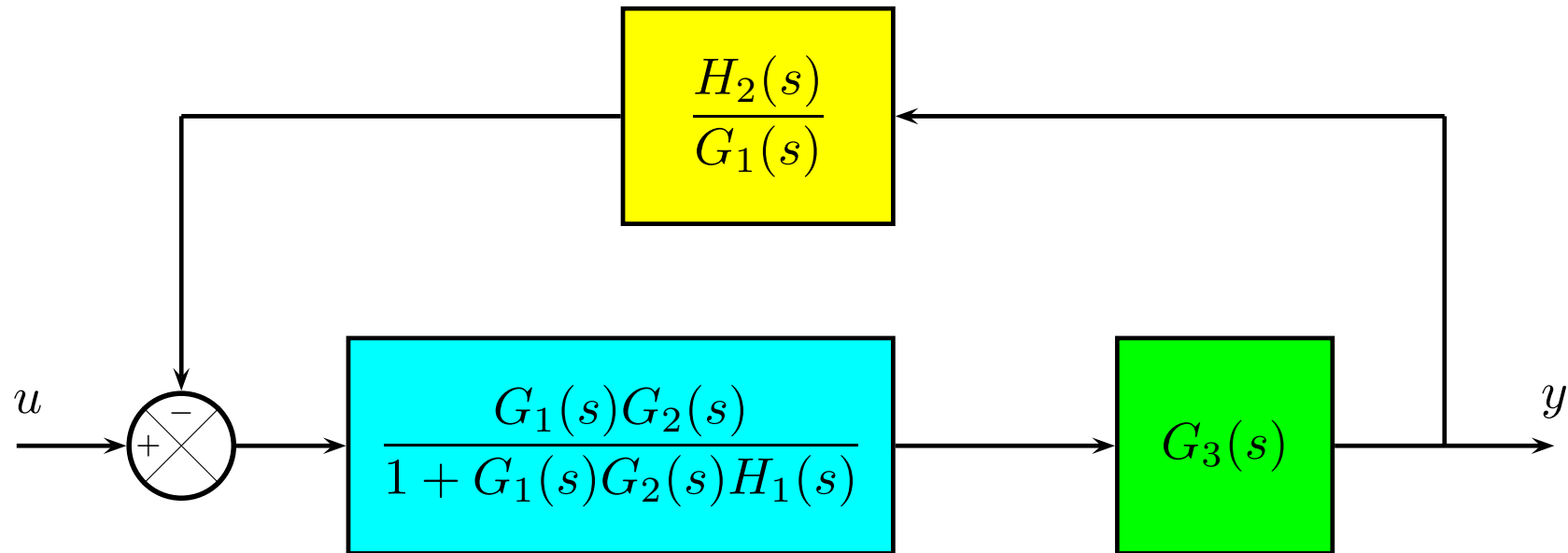
★ $x = G_1 e - H_2 y$

Determinação da **FT em malha fechada** :



★
$$x = G_1 \left(e - \frac{H_2}{G_1} y \right)$$

Determinação da **FT em malha fechada** :

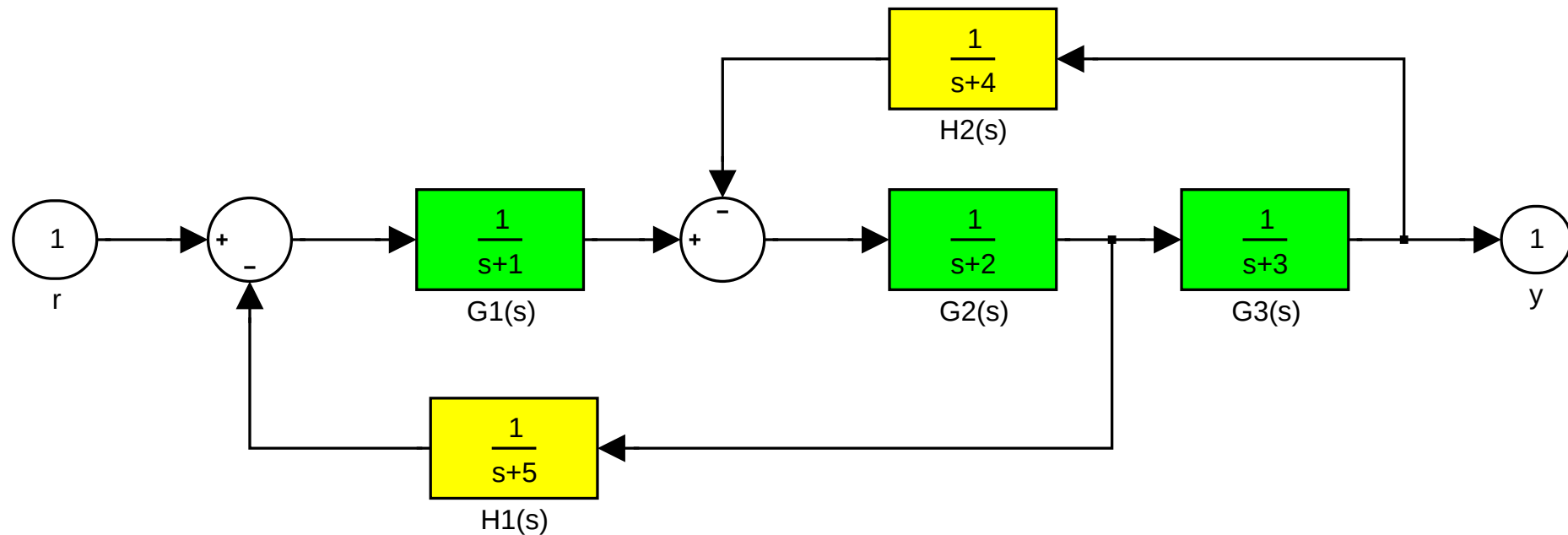


Determinação da **FT em malha fechada** :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s) G_3(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s)}$$

Exemplo 18

Usando MATLAB/Simulink.

Figura 6: Diagrama de blocos em Simulink. Model **dblocos.mdl**.

Script para obter a FT em malha fechada (`diag_blocos.m`) :

```
%-----  
%  
% Exemplo: Diagramas de blocos  
%  
%-----  
  
open_system('dblocos');  
  
[A,B,C,D] = linmod('dblocos'); % retorna o modelo de estado  
g = ss(A,B,C,D);  
h = tf(g)  
  
close_system('dblocos');
```

Resultado :

```
>> diag_blocos
```

Transfer function:

$$s^2 + 9s + 20$$

$$s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 227s^2 + 287s + 137$$

```
>>
```

```
>> _
```

Verificação : Script (verifica.m)

```
g1 = tf(1,[1 1]);
```

```
g2 = tf(1,[1 2]);
```

```
g3 = tf(1,[1 3]);
```

```
h1 = tf(1,[1 5]);
```

```
h2 = tf(1,[1 4]);
```

```
H = (g1*g2*g3)/(1 + g1*g2*h1 + g2*g3*h2);
```

```
G = minreal(H) % solução após todos os cancelamentos
```

Resultado :

```
>> verifica
```

Transfer function:

$$s^2 + 9s + 20$$

$$s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 227s^2 + 287s + 137$$

```
>> _
```

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 2

2 Representação no espaço de estado

Conteúdo

1. Introdução
2. Exemplo preliminar
3. Exemplo preliminar 2
4. Diagrama de blocos
5. Exemplos com Matlab/Simulink
6. Exercícios

2.1 Introdução

Hipótese: O aluno está familiarizado com as representações matemáticas

- ★ Resposta ao impulso (já visto em SL-I)
- ★ Equação diferencial ordinária (EDO)
- ★ Função de transferência

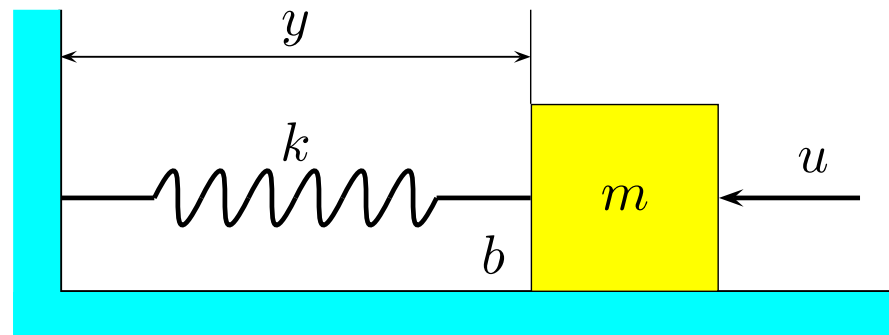
Novidade: Vamos introduzir a representação de SLIT's por

- ★ Variáveis de estado

Metodologia: Obtenção da representação de estado a partir da EDO.

2.2 Exemplo preliminar

Exemplo 1 Sistema mecânico tipo massa-mola-atrito.



Modelo : EDO de 2a. ordem

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$



Sistema mecânico : $\ddot{y}$ = aceleração
 $\dot{y}$ = velocidade e
 y = posição da massa

Manipulação :

1 EDO de 2a. ordem

$\Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDO de 1a. ordem} \\ \text{EDO de 1a. ordem} \end{array} \right.$

Introduzimos novas variáveis :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Neste caso : $x_1 =$ posição

$x_2 =$ velocidade da massa

Derivando-se x_1 e x_2 :

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$= -3y - 2\dot{y} + u$$

$$= -3x_1 - 2x_2 + u$$

Portanto, a EDO de 2a. ordem pode ser reescrita como

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + u$$

$$y = x_1$$

- ★ As equações acima formam uma representação de estado .
- ★ As variáveis x_1 e x_2 são os estados .

O sistema de equações

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + u$$

$$y = x_1$$

pode ser escrito na **forma matricial**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Introduzindo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

tem-se a forma matricial para a representação de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Importante :

- ★ A representação de estado de um SLIT não é única .
- ★ A escolha das variáveis de estado x_1 e x_2 foi arbitrária .

Exemplo 2 Mesmo sistema massa-mola-atrito.

Escolhemos :

$$\tilde{x}_1 = -y$$

$$\tilde{x}_2 = y + \dot{y}$$

Derivando-se $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\dot{y}$$

$$= y - \tilde{x}_2$$

$$= -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{y} + \ddot{y}$$

$$= \dot{y} + (-3y - 2\dot{y} + u) = -2y - (y + \dot{y}) + u$$

$$= 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + u$$

A representação do sistema passa para

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Interpretação. O estado $\tilde{x}$ é obtido a partir de uma **transformação linear** sobre x :

$$\tilde{x}_1 = -y = -x_1$$

$$\tilde{x}_2 = y + \dot{y} = x_1 + x_2$$

Usando notação matricial, tem-se

$$\tilde{x} = Tx = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x .$$

Condições iniciais

A solução da EDO

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = u$$

requer o conhecimento das **condições iniciais** $y(t_0)$ e $\dot{y}(t_0)$.

Para a solução das equações de estado (em x) é necessário o conhecimento de

$$x_1(t_0) = y(t_0)$$

$$x_2(t_0) = \dot{y}(t_0)$$

Para a representação equivalente (em $\tilde{x}$), a condição inicial é

$$\tilde{x}_1(t_0) = -y(t_0)$$

$$\tilde{x}_2(t_0) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)$$

Definição

Definição. *(Estado)*

O **estado** em $t = t_0$ de um sistema de ordem n é o conjunto de n valores $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$, que juntamente com o sinal de entrada para $t \geq t_0$, é suficiente para determinar todo o comportamento do sistema para $t \geq t_0$.

2.3 Exemplo preliminar 2

Exemplo 3 Vamos considerar agora um SLIT descrito por

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = \dot{u} + u$$

★ $\dot{u}$ não deve aparecer na representação de estado

Escolhemos as seguintes variáveis :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} - u \quad (!!)$$

★ Essas variáveis podem não ter significado físico.

Derivando-se x_1 e x_2 , obtemos

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - \dot{u}$$

$$= -3y - 2\dot{y} + u$$

$$= -3x_1 - 2(x_2 + u) + u$$

★ x_2 foi escolhida de modo que $\dot{x}_2 = \ddot{y} - \dot{u} \Rightarrow$ elimina $\dot{u}$.

Resultado :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

2.4 Diagrama de blocos

Representação de estado :
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

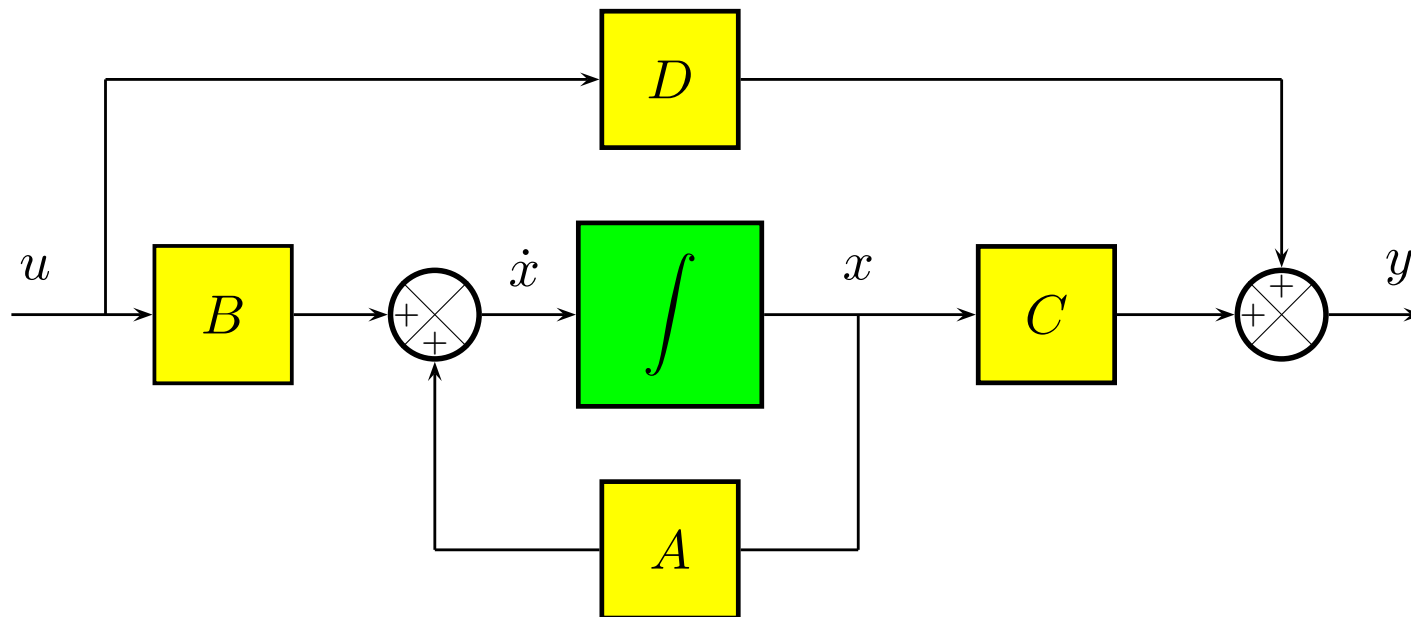
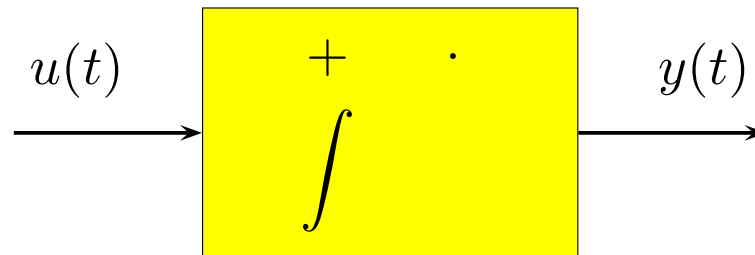


Figura 7: Diagrama de blocos.

Observações :

- ★ O diagrama de blocos utiliza somente as operações permitidas.



2.5 Exemplos com Matlab/Simulink

Exemplo 4 Equações de estado usando MATLAB/Simulink.

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

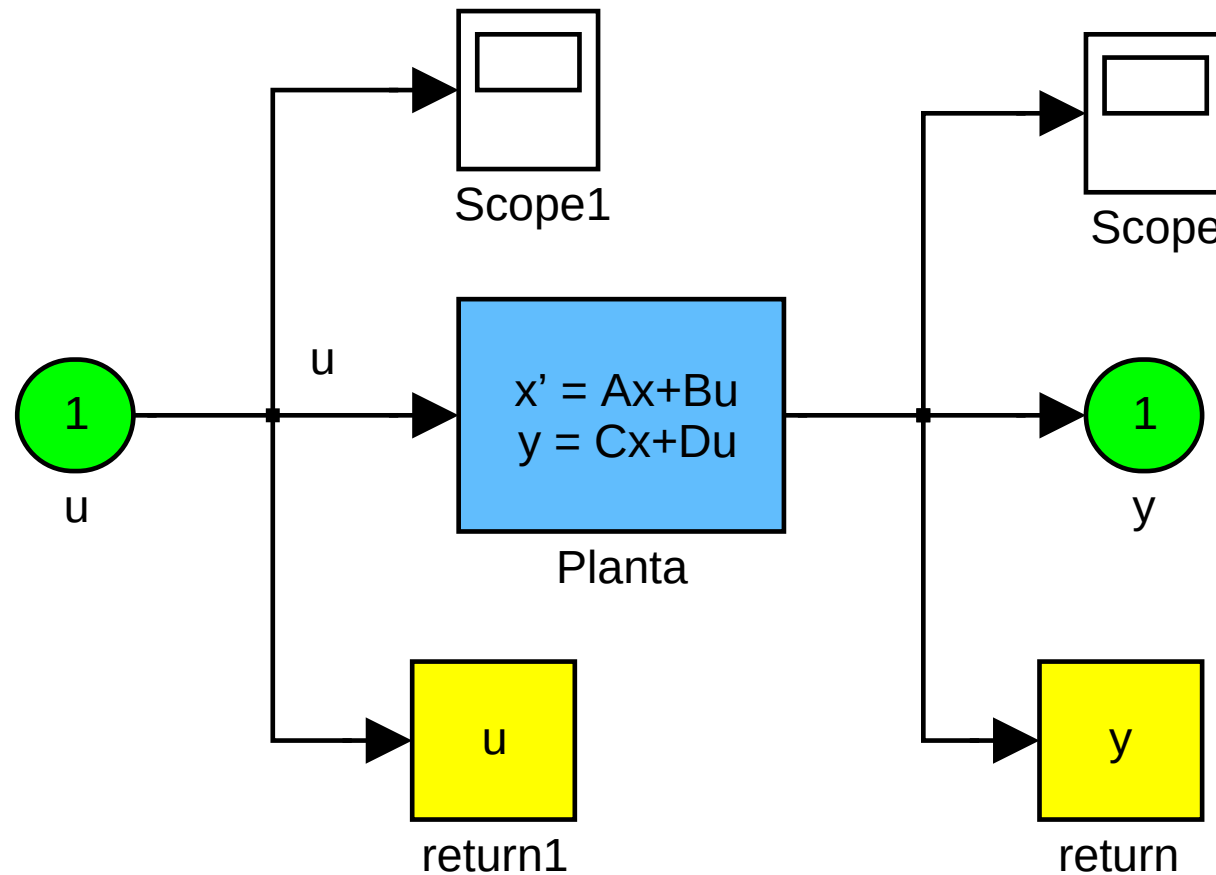


Figura 8: Diagrama de blocos em Simulink. Model **modelo.mdl**.

Script **simu1.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [ 1 0];
```

```
D = 0;
```

```
x0 = [1 0]; % condição inicial
```

```
tfinal = 8;
```

```
sim('modelo',tfinal)
```

```
plot(y,'Linew',2.5); grid on; shg
```

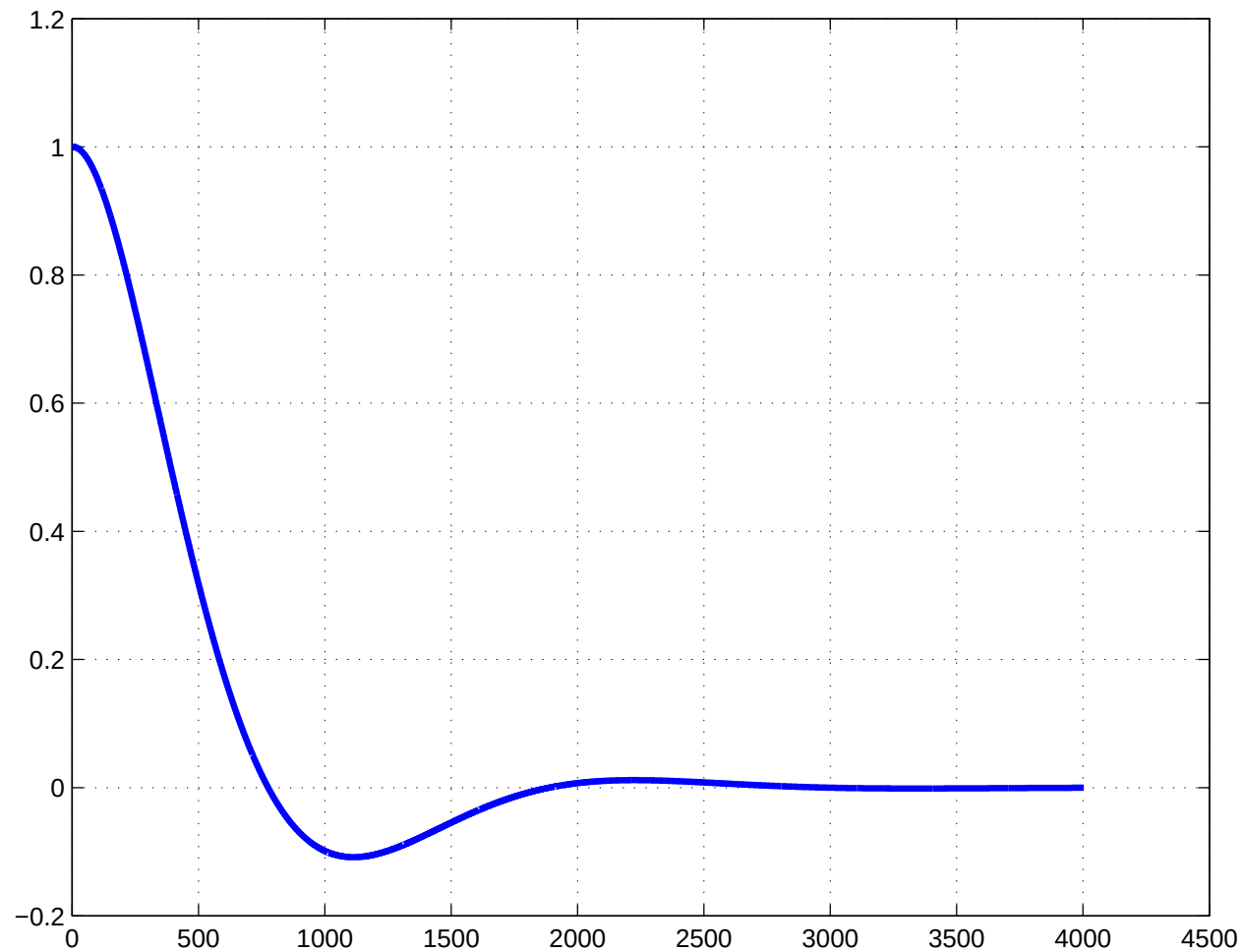
Resultado

Figura 9: Resposta à condição inicial. Script **simu1.m**.

Script **simu2.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [-1 -1; 2 -1]; % matrizes do sistema transformado
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [-1 0];
```

```
D = 0;
```

```
x0 = [-1 1]; % condição inicial
```

```
tfinal = 8;
```

```
sim('modelo',tfinal)
```

```
plot(y,'Linew',2.5); grid on; shg
```

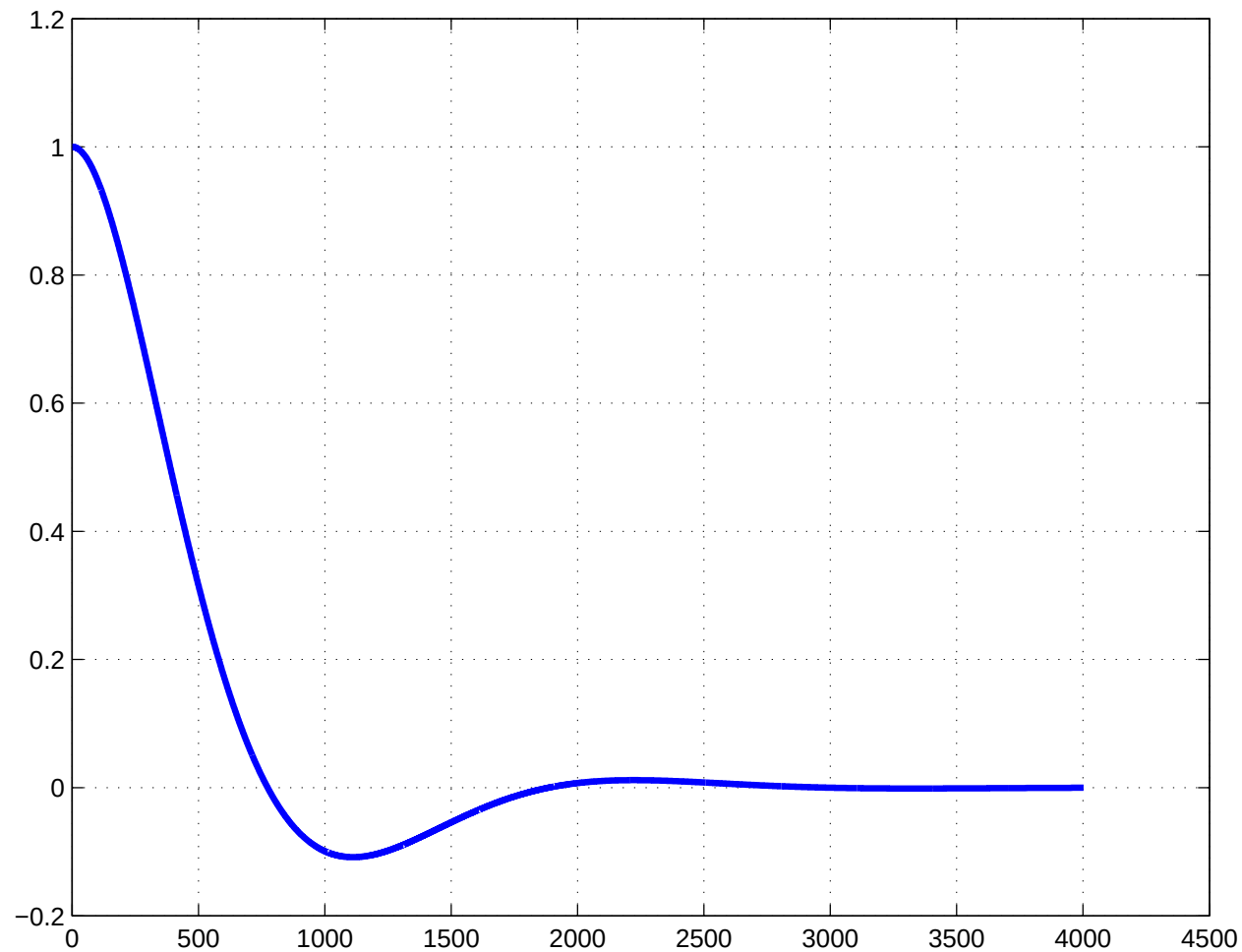
Resultado

Figura 10: Resposta à condição inicial. Script **simu2.m**.

Exemplo 5

Equações de estado usando MATLAB/Simulink.

Sistema massa-mola-atrito :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

★ Simulação alternativa do mesmo sistema utilizando bloco integrador.

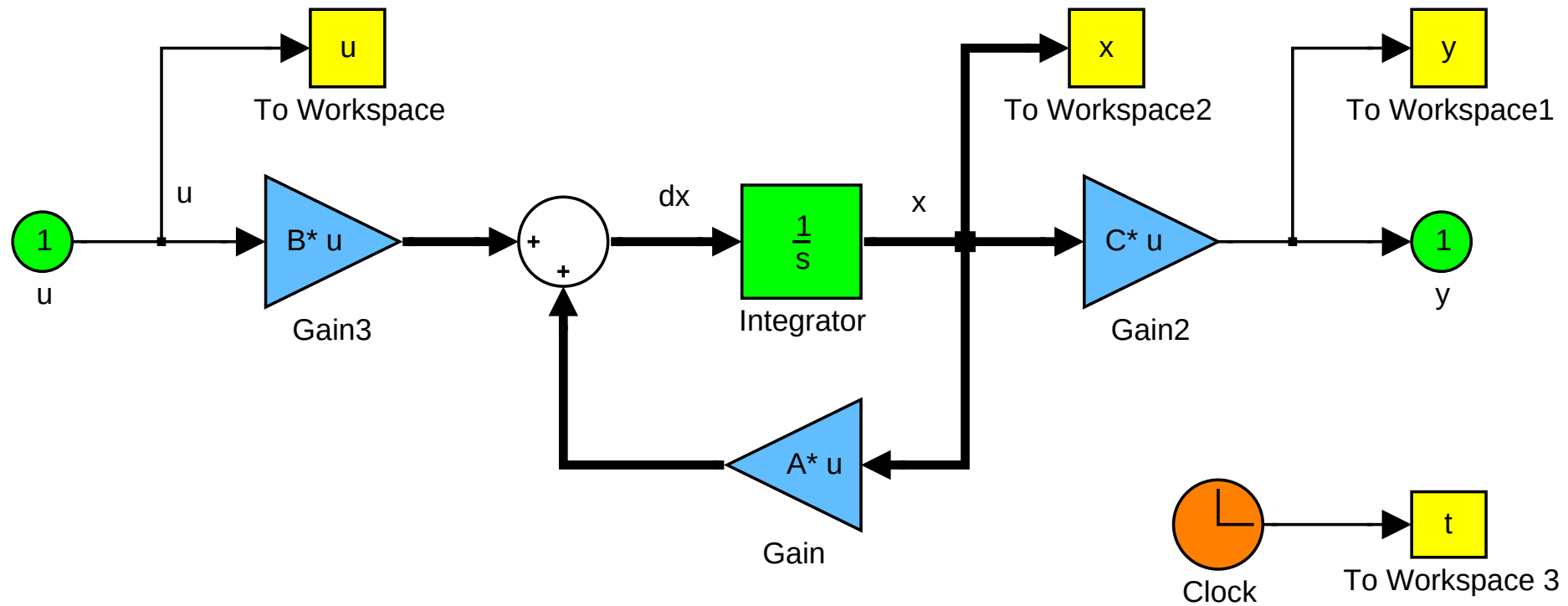


Figura 11: Diagrama de blocos em Simulink. Model **modelo1.mdl**.

★ Note a utilização do bloco **Clock** para obter a variável tempo.

Vantagens :

- ★ Maior controle sobre a integração numérica.
- ★ Acesso ao estado.

Script **simu3.m**

```
% Resposta do sistema massa-mola-atrito a uma condição inicial
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [ 1 0];
```

```
x0 = [1 0]; % condição inicial
```

```
open_system('modelo1');
```

```
set_param('modelo1','MaxStep','0.01')
```

```
tfinal = 10;
```

```
sim('modelo1',tfinal)
```

```
plot(t,x,'Linew',2.5); grid on; shg
```

```
close_system('modelo1');
```

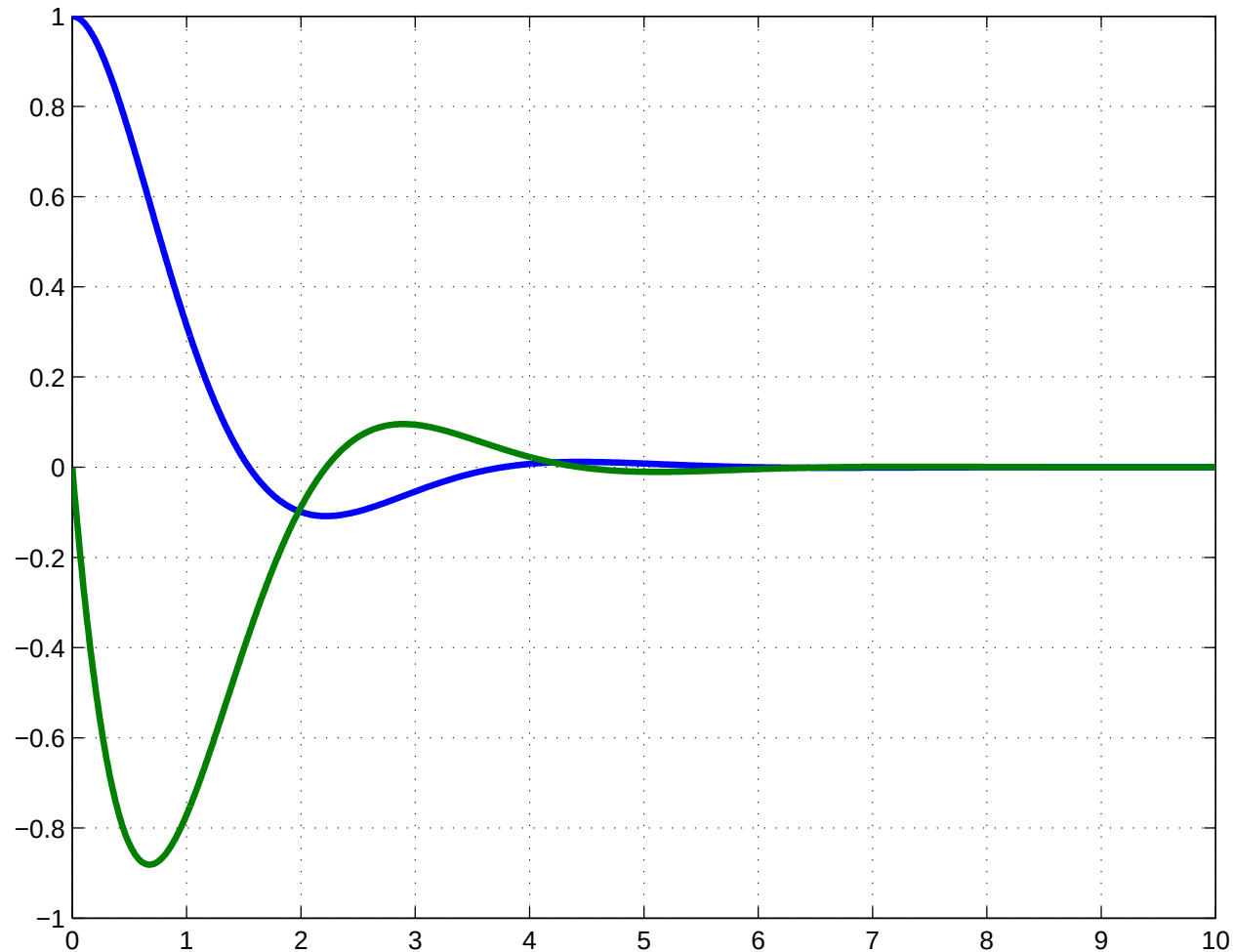
Resultado

Figura 12: Resposta à condição inicial. Script **simu3.m**.

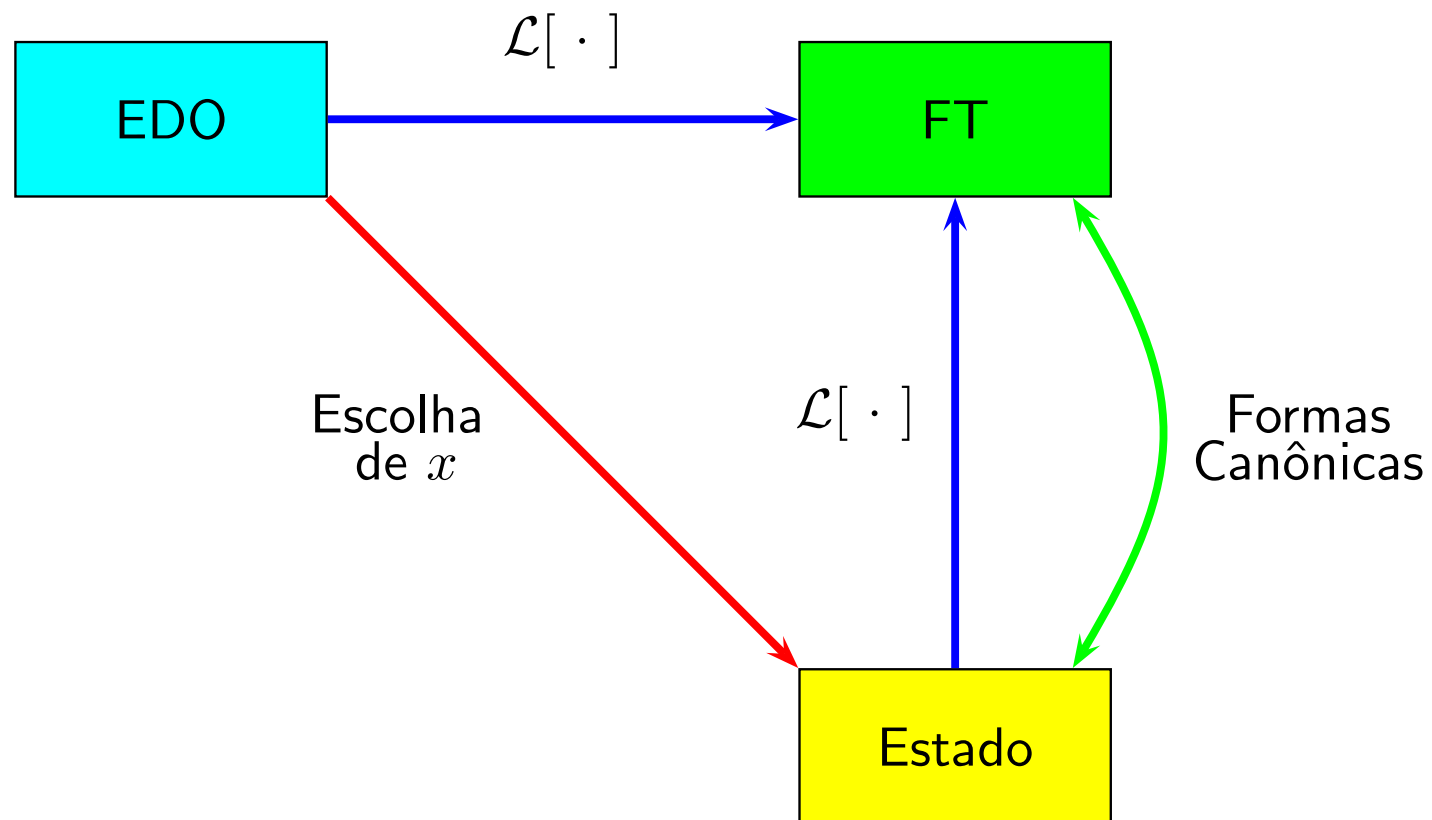
Importante :

- ★ Para SLITs de ordem elevada o procedimento descrito pode resultar bastante trabalhoso.
- ★ Método sistemático : utilização de formas canônicas .

Próximo passo :

- ★ Vamos determinar a Função de Transferência de um SLIT dado por uma representação de estado.

Resumo da metodologia



UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 3

3 Realização de funções de transferência

Conteúdo

1. Função de transferência (FT)
2. Formas canônicas
 - Forma canônica controlável
 - Forma canônica observável
3. Transformação de coordenadas
4. Exemplos
5. Exercícios

3.1 Função de transferência (FT)

Considere novamente a representação de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Estamos interessados em determinar a FT

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Aplicando Transformada de Laplace :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Portanto,

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

A FT procurada é :

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Exemplo 1 Seja o modelo de estado (vide [Exemplo preliminar 2](#))

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente a esse sistema é

$$g(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lembrete. Inversa de uma matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Cálculos :

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{s+1}{s^2 + 2s + 3}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2 Usando Matlab.

Considere o mesmo sistema do exemplo anterior :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Script `calcula_ft.m`

```
% Determinação de função de transferência
```

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
s1 = ss(A,B,C,D) % cria o sistema s1 (representação de estado)
```

```
g = tf(s1) % determina a Função de Transferência de s1
```

Resultado

```
>> calcula_ft
```

Transfer function:

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

```
>>
```

Exemplo 3 Usando Matlab/symbolic.

Ainda utilizando o mesmo sistema :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Script `calcula_ft_sym.m`

```
A = [0 1; -3 -2]; % matrizes
```

```
B = [1; -1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
syms s;      % cria variáveis simbólicas
```

```
I = eye(2); % cria matriz identidade
```

```
g = C*inv(s*I - A)*B + D; % calcula a Função de Transferência
```

```
g = simple(g);           % determina a forma mais simples
```

```
g
```

Resultado

```
>> calcula_ft_sym
```

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

```
>>
```

3.2 Formas canônicas

★ Úteis para a obtenção de uma representação de estado de um SLIT.

Neste contexto, duas formas canônicas são de particular interesse:

1. Forma canônica controlável (FC Co)
2. Forma canônica observável (FC Ob)

Forma canônica controlável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Forma canônica controlável (**forma compacta**)

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cccc} \mathbf{0} & & & & \\ \hline & \mathbf{I} & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 1 \end{array} \right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{array} \right] x$$

Forma canônica observável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x$$

Forma canônica observável (**forma compacta**)

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \\ -a_0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} \end{matrix} \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \end{array} \right] x$$

Exemplo 4 Seja o seguinte SLIT de 2a. ordem na **FC Co**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente é dada por

$$g(s) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculos :

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\
 &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}
 \end{aligned}$$

Propriedade :

- ★ Os coeficientes b_i e a_i são os mesmos que aparecem no numerador e denominador da FT.
- ★ Para se obter uma representação de estado a partir de uma FT, basta o conhecimento desses coeficientes.
- ★ A FC Ob também tem essa propriedade.

Exemplo 5 Seja o seguinte SLIT de 2a. ordem na **FC Ob**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A FT correspondente é dada por

$$g(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Cálculos :

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}
 \end{aligned}$$

Exemplo 6 Encontrar um modelo de estado para o SLIT de 3a. ordem

$$g(s) = \frac{2s^2 + 4s + 7}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Representação na FC Co :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Representação na FC Ob :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

3.3 Transformação de coordenadas

Modelo de estado :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Podemos definir estados z_i a partir de uma combinação linear dos estados x_i .

Isso pode ser representado por uma transformação linear

$$z = Tx$$

onde T é uma matriz não singular .

Representação de estado transformado

Multiplicando a 1a. equação por T :

$$T\dot{x} = TAx + TBu$$

Porém,

$$\dot{z} = T\dot{x}$$

$$x = T^{-1}z$$

Eliminando a variável x , tem-se

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$$

$$y = CT^{-1}z + Du$$

Após definir as matrizes

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

$$\tilde{B} = TB$$

$$\tilde{C} = CT^{-1}$$

$$\tilde{D} = D$$

obtemos a seguinte representação do sistema com estado z

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}z + \tilde{D}u$$

Exemplo 7

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 4

4 Linearização

Conteúdo

1. Introdução
2. Exemplos
3. Exercícios

4.1 Introdução

Problema. A grande maioria dos sistemas/processos são não lineares.

- ★ Os sistemas NL são de difícil análise.
- ★ Existem muitas ferramentas (eficientes) para a análise de sistemas lineares.

Uma solução : Linearização.

- ★ É o processo de se encontrar uma aproximação linear para o comportamento do sistema NL.

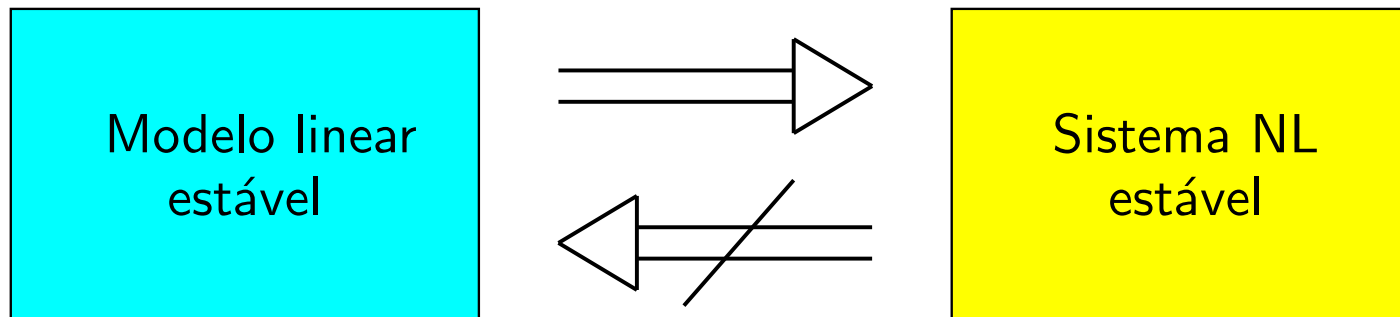
Resultado chave :

Lyapunov mostrou (~ 1890) que

se um modelo linear é válido e estável nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio,

então $\exists$ uma região contendo esse equilíbrio em que o sistema NL é estável.

Fato.



Cuidado! Estabilidade **local** (dentro de uma vizinhança).

A linearização pode eliminar **amortecimento não linear**.

Uma representação geral para sistemas NL :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Uma classe de sistema NLs de particular interesse é caracterizada pelo seguinte modelo :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

★ Essa classe é dita *affine em u* .

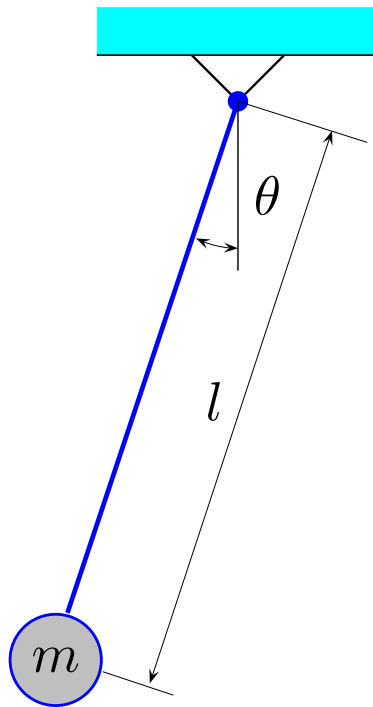
Definição. Um sistema é dito **autônomo** se $f(\cdot)$ não depende explicitamente de t , i.e., se a dinâmica do sistema é dada por

$$\dot{x} = f(x)$$

Em outras palavras, $u \equiv 0$.

Definição. Um estado x° é dito **equilíbrio** (ou ponto de equilíbrio) do sistema sse

$$f(x^\circ) = 0$$

Exemplo 1 Pêndulo.

EDO : $J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$

Estado :
$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Eq. de estado :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{J}mlg \sin(x_1) \end{cases}$$

Equilíbrio :
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \sin(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm n\pi$$

Método para linearização : Expansão em série de Taylor em torno de x° .

$$\dot{x} = f(x) = f(x^\circ) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ)^2 + \dots$$

Truncando a expressão,

$$\dot{x} = f(x) \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^\circ} (x - x^\circ)$$

Nota. Lembre-se que $f(x^\circ) = 0$!

Definindo-se

$$\boxed{v = x - x^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{v} = \dot{x}}$$

$$\boxed{A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^{\circ}}}$$

podemos escrever a equação linearizada como

$$\boxed{\dot{v} = Av}$$

Resultado mais geral

Dado o sistema NL :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Modelo linearizado :

$$\dot{v} = Av + Bw$$

onde

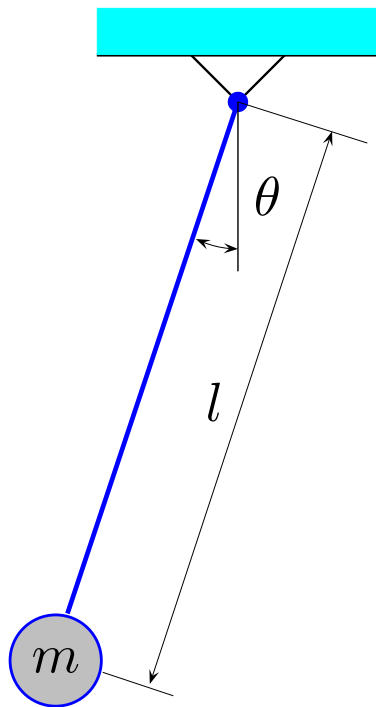
$$v = x - x^{\circ}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^{\circ}, u=u^{\circ}}$$

$$w = u - u^{\circ}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x^{\circ}, u=u^{\circ}}$$

Exemplo 2 Pêndulo.



EDO : $J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$

Eq. de estado :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{J}mlg \sin(x_1) \end{cases}$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio $x^\circ = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mlg}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mlg}{J} & 0 \end{bmatrix} v$$

Exemplo 3 Pêndulo com atrito.

$$\text{EDO : } J\ddot{\theta} + mlg \sin \theta + b\dot{\theta} = 0$$

$$\text{Eq. de estado : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{mlg}{J} \sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2 = -c_1 \sin(x_1) - c_2 x_2 \end{cases}$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio $x^\circ = 0$:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} v$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio $x^\circ = (\pi, 0)$:

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x_1=\pi, x_2=0} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ c_1 & -c_2 \end{array} \right]$$

Portanto,

$$\dot{v} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ c_1 & -c_2 \end{array} \right] v$$

Exercício. Linearizar o sistema *massa-mola não linear* abaixo

$$m\ddot{x} + k_1x + k_2x^3 = 0$$

Ref.: (Slotine & Li 1991)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 5

5 Solução da equação de estado

Conteúdo

1. Caso escalar
 - Solução homogênea
 - Solução geral
2. Caso com coeficientes matriciais
 - Solução homogênea
 - Solução geral
3. Exemplos
4. Exercícios

5.1 Caso escalar

Vamos iniciar recordando o método de solução de uma EDO escalar.

Problema : Resolver a equação

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

onde a e $b \in \mathbb{R}$.

Solução homogênea

Para $u(t) \equiv 0$, tem-se

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = ax(t)$$

A variável dependente $x(t)$ e a variável independente t podem ser separadas :

$$\frac{dx}{x} = a dt$$

A forma encontrada acima é dita integrável .

Podemos **integrar ambos os lados** da equação para obter

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{t_0}^t a d\tau$$

Após integração :

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = a(t - t_0)$$

ou melhor

$$\ln \frac{x(t)}{x(t_0)} = a(t - t_0)$$

Usando a relação $e^{\ln x} = x$, explicitamos a **solução homogênea**

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0)$$

Solução não homogênea

Para $u(t) \neq 0$,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

- ★ Para aplicar o mesmo método de solução anterior, é necessário reduzir a equação a uma forma integrável.
- ★ Na equação acima as variáveis $x(t)$ e t não são facilmente separadas.
- ★ Procedimento mais elaborado ...

Passo 1 Multiplicamos a equação pela **variável auxiliar** $k(t)$,

$$k(t) \dot{x} - k(t) ax = k(t) bu$$

Passo 2 De modo a tornar o lado esquerdo da equação uma **diferencial exata**, escolhemos $k(t)$ tal que

$$\dot{k}(t) = -ak(t)$$

A solução, já visto acima, é dada por

$$k(t) = e^{-a(t-t_0)} k(t_0)$$

Desse modo obtemos

$$k\dot{x} + \dot{k}x = k bu$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}[kx] = k bu$$

Separando as variáveis,

$$d[kx] = k bu dt$$

Esta é a forma **integrável** procurada.

Integrando ambos os lados,

$$\int_{k(t_0)x(t_0)}^{k(t)x(t)} d\xi = \int_{t_0}^t k(\tau) bu(\tau) d\tau$$

Resultado:

$$k(t)x(t) - k(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^t k(\tau) bu(\tau) d\tau$$

Explicitando $x(t)$, tem-se

$$x(t) = \frac{k(t_0)}{k(t)} x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{k(\tau)}{k(t)} bu(\tau) d\tau$$

Como

$$k(t) = e^{-a(t-t_0)} k(t_0)$$

tem-se que

$$\frac{k(t_0)}{k(t)} = \frac{k(t_0)}{e^{-a(t-t_0)} k(t_0)} = e^{a(t-t_0)}$$

$$\frac{k(\tau)}{k(t)} = \frac{e^{-a(\tau-t_0)} k(t_0)}{e^{-a(t-t_0)} k(t_0)} = e^{-a(\tau-t_0-t+t_0)} = e^{a(t-\tau)}$$

Substituindo as expressões acima, obtém-se a **solução geral**

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

5.2 Caso com coeficientes matriciais

Para simplificar a apresentação desse caso, vamos considerar inicialmente o seguinte exemplo com apenas 2 EDO's

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 5x_2, & x_1(0) = 8 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, & x_2(0) = 5 \end{cases}$$

Fazendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

o sistema de equações acima pode ser reescrito na **forma matricial**

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

Solução homogênea

★ A solução do caso escalar $\dot{x} = ax$ é uma função exponencial $x(t) = e^{at}x_0$.

Hipótese: A equação $\dot{x} = Ax$ tem solução com a mesma forma exponencial

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t}y \\ x_2(t) = e^{\lambda t}z \end{cases}$$

ou melhor

$$x(t) = e^{\lambda t}v \quad \text{onde} \quad v = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Próximo passo : Encontrar valores de λ , y e z tais que a equação $\dot{x} = Ax$ seja satisfeita.

Substituindo-se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ nas respectivas equações diferenciais, tem-se

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} y = 4e^{\lambda t} y - 5e^{\lambda t} z \\ \lambda e^{\lambda t} z = 2e^{\lambda t} y - 3e^{\lambda t} z \end{cases}$$

Após cancelar o termo $e^{\lambda t}$, resta o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 4y - 5z = \lambda y \\ 2y - 3z = \lambda z \end{cases}$$

Ou melhor,

$$Av = \lambda v$$

★ λ é chamado *autovalor de A*

★ v é o *autovetor* associado

Podemos reescrever a equação anterior como

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Importante :

- ★ v pertence ao *subespaço nulo* de $(A - \lambda I)$ (i.e., $v \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$).
- ★ Estamos interessados somente em *soluções não triviais* $v \neq 0$.
- ★ λ é tal que $(A - \lambda I)$ tem um espaço nulo.
- ★ A solução λ procurada é tal que $(A - \lambda I)$ seja *singular*.

Fato. λ é autovalor de A $\Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

.

★ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado **polinômio característico** de A .

★ A equação $p(\lambda) = 0$ é denominada **equação característica** de A .

- ★ Os autovalores são uma das características mais importantes dos sistemas dinâmicos.

Propriedades:

1. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{traço}(A),$
2. $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A).$

Fato. A cada autovalor λ_i distinto corresponde um autovetor v_i tal que

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

No caso da matriz A do exemplo em questão (2×2) :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

Estas equações podem ser reescritas na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Definindo-se a matriz de autovetores

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz diagonal dos autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$AV = V\Lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\Lambda = V^{-1}AV$$

★ A transformação linear que diagonaliza a matriz A é dada pela matriz V .

Retornando ao exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

★ Os autovalores são **distintos**, portanto podemos determinar 2 autovetores ***l.i.*** (linearmente independentes).

Para **$\lambda_1 = -1$** :

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para **$\lambda_2 = 2$** :

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Importante:

- ★ Os autovetores não são únicos .
- ★ Qualquer valor $v \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ .
- ★ É usual escolher autovetores normalizados com, por exemplo, um dos elementos igual a 1.

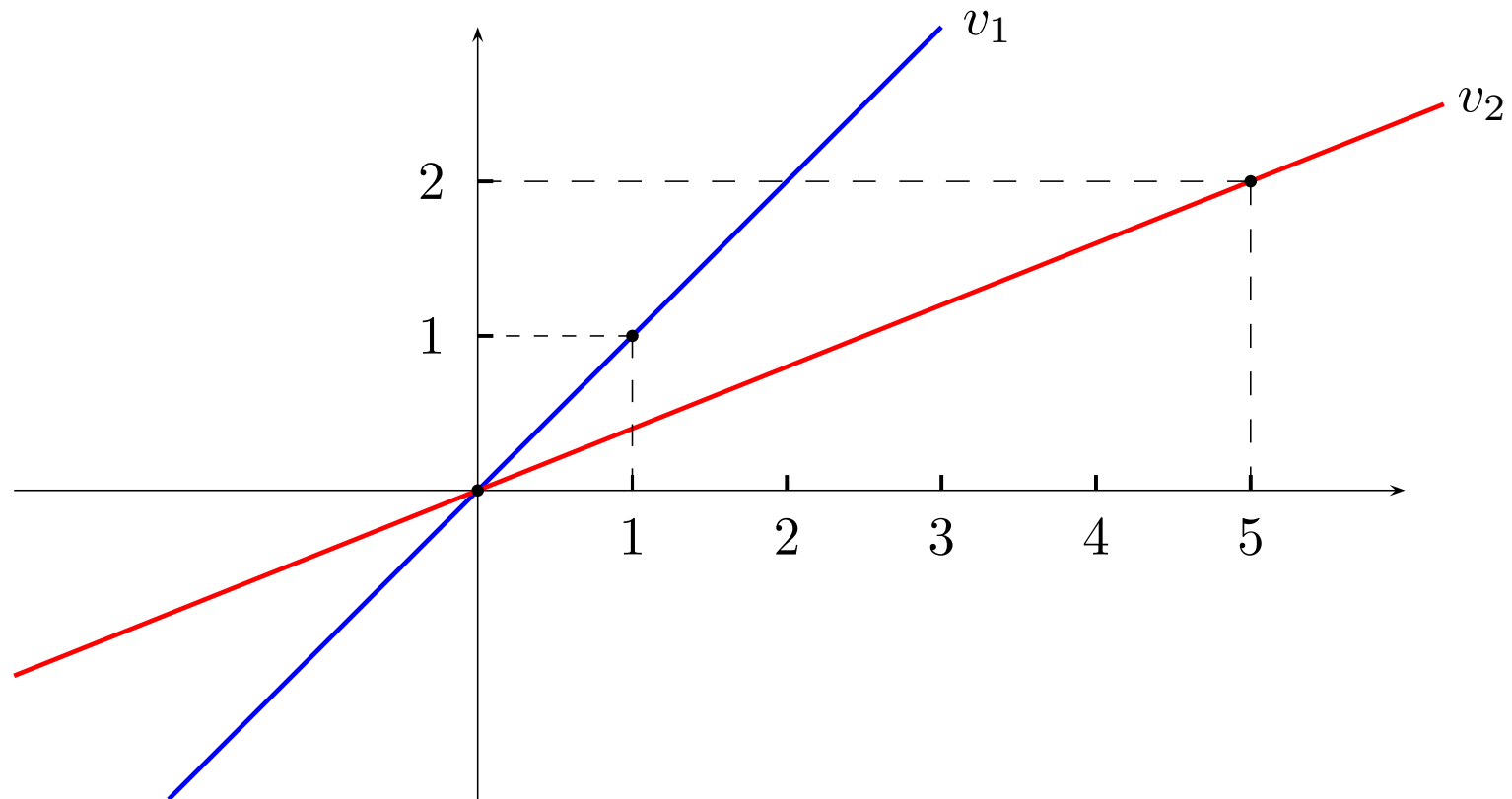


Figura 13: Interpretação geométrica de autovetor.

★ Um autovetor define uma **reta** passando pela origem (**subespaço**).

Substituindo os valores de λ_i e v_1 calculados, tem-se

$$x = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Princípio da superposição:

Qualquer combinação linear das soluções acima também é uma solução do problema.

Portanto,

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas a partir das condições iniciais .

Fazendo $t = 0$ nas equações,

$$x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema de equações lineares acima :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

★ Note que $x(0) = V \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = V^{-1} x_0}$

Portanto, a **solução homogênea** da equação diferencial dada é

$$x = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3e^{-t} + 5e^{2t} \\ x_2(t) &= 3e^{-t} + 2e^{2t} \end{aligned}$$

Próximo passo : Utilizar notação matricial .

★ Notação mais compacta para a solução.

Observamos que a **solução homogênea**

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

pode ser escrita como

$$x = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Relação fundamental :

$$e^{\Lambda t} := \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução homogênea pode ser expressa como

$$x = V e^{\Lambda t} c$$

onde $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^T$.

★ c é tal que $x(0) = V c = x_0 \Rightarrow$

$$c = V^{-1} x_0$$

Resultado: a solução homogênea de $\dot{x} = Ax$ é

$$x(t) = V e^{\Lambda t} V^{-1} x_0$$

Vamos agora introduzir formalmente a definição de **exponencial matricial**.

Definição.

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Propriedades:

1. e^{At} tem inversa $\forall t$
2. $e^{As}e^{At} = e^{A(s+t)}$
3. $e^{At}e^{-At} = I$
4. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

Usando a definição e as propriedades acima, também podemos verificar que:

1. Relação fundamental:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

2. Solução homogênea:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

é solução da equação $\dot{x} = Ax$.

Prova. Pela propriedade (4),

$$\dot{x} = Ae^{At} x_0 = Ax$$

3. Relação fundamental:

$$e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1}$$

Prova.

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \\ &= I + V\Lambda V^{-1}t + \frac{(V\Lambda V^{-1}t)^2}{2!} + \dots \\ &= V \left(I + \Lambda t + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \dots \right) V^{-1} \\ &= Ve^{\Lambda t}V^{-1} \end{aligned}$$

4. Solução homogênea:

A solução do problema

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

é dada por

$$x(t) = Ve^{\Lambda t}V^{-1}x_0 = e^{At}x_0$$

Solução não homogênea

A solução geral do problema :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

é dada pela fórmula :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- ★ O método para se chegar a essa solução é semelhante ao que foi empregado no caso escalar.

A **variável auxiliar** nesse caso é uma **matriz $K(t)$** tal que

$$\dot{K}(t) = -K(t)A$$

cuja solução é

$$K^T(t) = e^{-(t-t_0)A^T} K^T(t_0)$$

Prova. Pode-se verificar que a solução $K(t)$ satisfaz a equação diferencial :

$$\begin{aligned}\dot{K}^T(t) &= -A^T e^{-(t-t_0)A^T} K^T(t_0) \\ &= -A^T K^T(t)\end{aligned}$$

isto é,

$$\dot{K}(t) = -K(t)A$$

Importante:

EDO : $\dot{x} = Ax + Bu$

- ★ A escolha de $K(t)$ anterior permite reduzir a EDO a uma forma integrável .
- ★ É usual na literatura, expressar a solução da EDO em termos da matriz de transição de estado

$$\Phi(t) = e^{At}$$

isto é :

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

Está na hora de fazer uma pequena revisão de ...

Álgebra Linear : Bloco de *Jordan*

5.3 Exemplos

4 casos :

- Autovalores distintos
- Autovalores repetidos
- Autovalores imaginários
- Autovalores complexos

Exemplo 1 Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(...)

Exemplo 2 Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basta aplicar a definição

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & t \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t^2 & 2t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots & t + t^2 + \dots \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Idem. Aplicando a definição

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots$$

Solução :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Oscilador harmônico})$$

Determinação dos **autovalores** :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Portanto :

$$\lambda = \pm i$$

Determinação dos autovetores associados :

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Nota. Como A está na forma companheira , então

$$v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix}$$

Resultado :

$$e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

★ Note que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = I \cos t + A \sin t \quad (!!)$$

Verificação

$$\Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix} \\ &= I \cos t + \Lambda \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= V e^{\Lambda t} V^{-1} \\ &= V (I \cos t + \Lambda \sin t) V^{-1} \\ &= I \cos t + A \sin t \end{aligned}$$

Conclusão



$$e^{At} = I \cos t + A \sin t$$



Não é necessário calcular V !!

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5 Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Oscilador amortecido})$$

Autovalores :

$$\lambda = 1 \pm i$$

Portanto :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} = e^t \left(I \cos t + \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \sin t \right)$$

Porém :
$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \Lambda - I$$

Porém :

$$e^{\Lambda t} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

$$= V e^t (I \cos t + \Lambda \sin t - I \sin t) V^{-1}$$

$$= e^t (I \cos t + A \sin t - I \sin t)$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício. Calcular e^{At} para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Notas e referências

- ★ A solução do caso escalar foi tirada de ([William L. Brogan 1991](#)), pág. 309.
- ★ O exemplo de 2a. ordem pode ser encontrado em (Strang 1988), pag. 243.

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 6

6 Revisão: Álgebra Linear

Conteúdo

1. Espaços vetoriais
2. Independência linear
3. Base e *Span*
4. Dimensão
5. Representação
6. Norma de vetores
7. Ortonormalização
8. Sistema de equações lineares
9. Transformações de similaridade
10. Forma companheira
11. Bloco de *Jordan*
12. Funções de matrizes
13. Teorema de *Cayley-Hamilton*
14. Equação de *Lyapunov*
15. Formas quadráticas
16. Inversão de matrizes
17. Algoritmo de *Leverrier*
18. Exemplos
19. Exercícios

6.1 Espaços vetoriais

Espaços vetoriais de interesse : $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

Exemplo 1 Representação por n -uplas.

$$\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Definição. *(válida para $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$)*

Espaço vetorial (EV) é um conjunto de vetores com **regras** para adição de vetores e multiplicação por escalar.

Operações possíveis :

- adição de 2 vetores
- multiplicação por escalar

} Combinação linear

Exemplo 2

- Espaço $\mathbb{R}^\infty$.
- Espaço $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- Espaço de funções $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Nota. É necessário adotar uma **convenção** para representar $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $f(x)$ na forma de **n -uplas**.

Definição. (*Subespaço*)

Subespaço de um EV é um subconjunto **não vazio** que satisfaz 2 exigências :

- (1) é fechado para a adição
- (2) é fechado para produto por escalar.

Exemplo 3

- Plano em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.
- Linha em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.
- Origem : $\{0\}$.

6.2 Independência linear

Definição. O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é ***l.i*** sse

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

 $\Rightarrow$

$$c_i = 0$$

Exemplo 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix}$$

$$c_2 = 3c_1 \Rightarrow \boxed{3c_1 - c_2 + 0c_3 + 0c_4 = 0} \Rightarrow c_1 \text{ e } c_2 \text{ são l.i.}$$

$$c_4 = c_1 + \frac{1}{3}c_3 \Rightarrow \boxed{c_1 + 0c_2 - \frac{1}{3}c_3 + c_4 = 0}$$

$$l_3 = 2l_2 + 5l_1 \Rightarrow \boxed{-5l_1 + 2l_2 - l_3 = 0}$$

Portanto, a matriz A possui

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 2 \text{ colunas } l.i. \\ \bullet 2 \text{ linhas } l.i. \end{array} \right\} \text{rank}(A) = 2$$

Nota. Pelo teorema fundamental da álgebra linear

$$\text{No. de colunas } l.i. = \text{No. de linhas } l.i.$$

6.3 Base e *Span*

Definição. Se um EV consiste de todas as combinações lineares dos vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então estes vetores **geram (*span*)** o EV.

Definição. Uma **base** para um EV é um conjunto de vetores com 2 propriedades:

- (1) o conjunto é *l.i.*
- (2) o conjunto gera o EV.

Exemplo 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{R}(A)$ o EV gerado pelas colunas de A .

Base para $\mathcal{R}(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

6.4 Dimensão

Definição. **Dimensão** de um EV é o máximo número de vetores *l.i.* pertencente ao espaço.

Fato. Quaisquer 2 bases para um EV contém o **mesmo número** de vetores.

Este número é a **dimensão do EV**.

Exemplo 6

$$X_1 = \{ \text{plano em } \mathbb{R}^3 \text{ passando pela origem} \}$$

$$\text{Dim}(X_1) = 2.$$

$$X_2 = \{ \text{linha em } \mathbb{R}^3 \text{ passando pela origem} \}$$

$$\text{Dim}(X_2) = 1.$$

$$X_3 = \{ \text{origem} \} = \{0\}$$

$$\text{Dim}(X_3) = 0.$$

6.5 Representação

A todo EV $\mathbb{R}^n$ associa-se uma base canônica ortonormal :

$$i_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad i_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A **representação** de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ na base canônica ortonormal é dada por :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{base}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

★ É uma representação **natural**.

Seja $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ uma base para $\mathbb{R}^n$.

Fato. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ conjunto $\{\alpha_i\}$ tal que

$$x = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_n q_n$$

Podemos escrever :

$$x = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_n q_n = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}} := Q\bar{x}$$

O vetor $\bar{x}$ é denominado **representação** de x na base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$.

Exemplo 7

Vetor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Base **canônica ortonormal** para $\mathbb{R}^2$: $\{i_1, i_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Seja a base : $\{q_1, q_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

A representação de x na base $\{i_1, i_2\}$ é :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

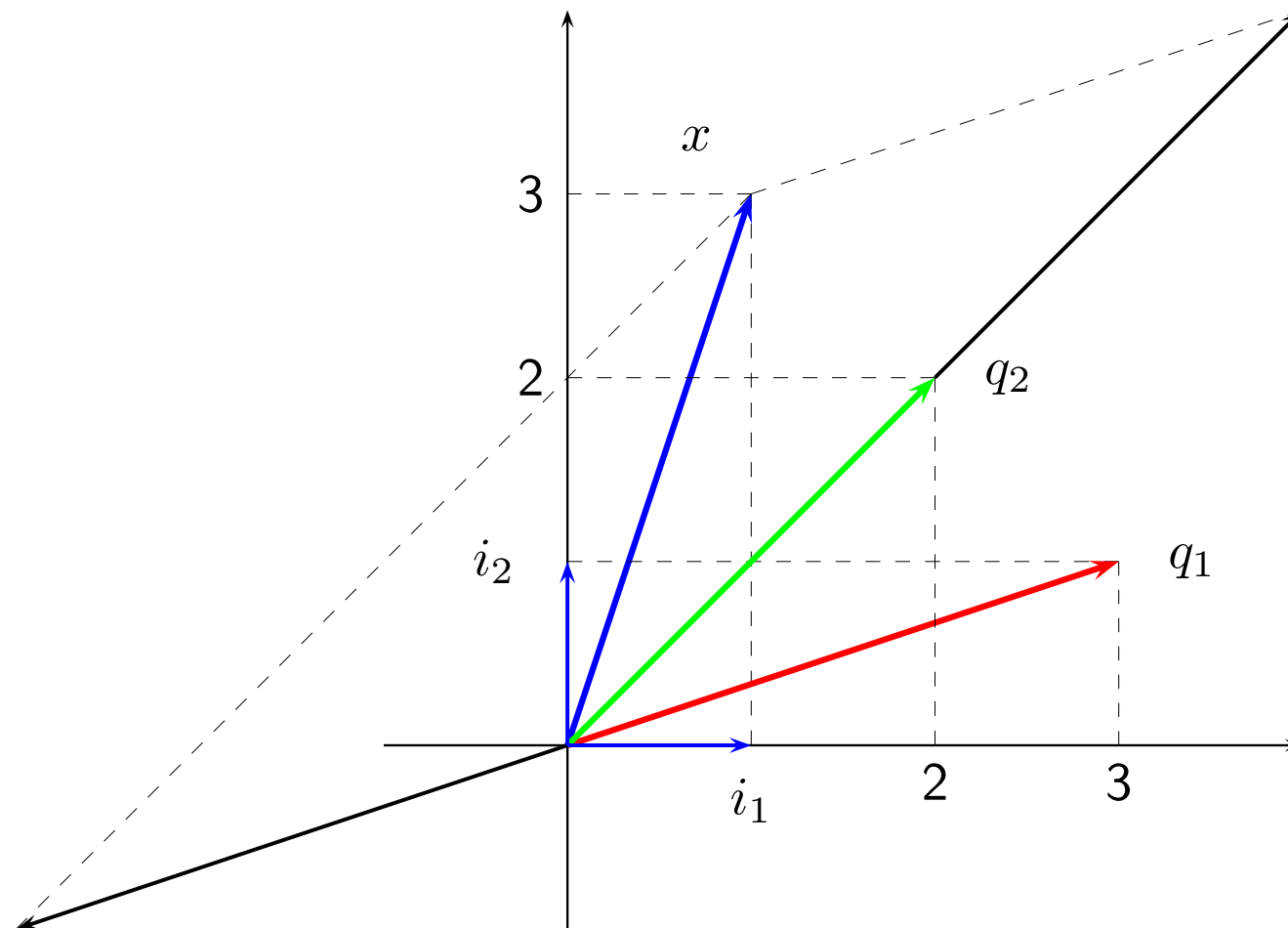


Figura 14: Representação de x na base $\{q_1, q_2\}$.

6.6 Norma de vetores

Definição. **Norma** de $x \in \mathbb{R}^n$ é uma função, denotada por $\|x\|$, com as seguintes propriedades :

$$(1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(4) \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

★ Norma é a generalização do conceito de distância.

Definição.Norma p :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^{1/p}$$

As normas mais usuais são :

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$$

6.7 Ortonormalização

Definição. Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é dito **normalizado** se

$$x^T x = 1 .$$

Definição. 2 vetores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ são **ortogonais** se

$$x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = 0 .$$

Definição. 1 conjunto de vetores $x_i \in \mathbb{R}^n$ é dito **ortonormal** se

$$x_i^T x_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

i.e., todos os vetores têm norma 1 e são **ortogonais entre si**.

(...)

6.8 Sistema de equações lineares

Seja o sistema de equações lineares :

$$Ax = b$$

(...)

6.9 Transformação de similaridade

(...)

6.10 Forma companheira

(...)

6.11 Bloco de Jordan

Fato. Toda matriz quadrada $n \times n$ possui exatamente n autovalores.

Fato. A cada autovalor distinto λ_i corresponde um **autovetor associado** v_i .

Problema. Autovalores repetidos.

Problema. Autovalores repetidos.

★ É possível que uma matriz tenha um conjunto incompleto de autovetores .

★ Não é possível determinar uma matriz de autovetores V tal que

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

Quer dizer, a matriz A pode não ser diagonalizável .

★ Para contornar essa situação, introduz-se os blocos de Jordan

(generalização da forma diagonal) .

Um bloco de Jordan de ordem n , correspondente a um autovalor repetido com multiplicidade n , tem a seguinte forma geral

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemplo 8

Uma matriz 4×4 com os 4 autovalores repetidos pode ser similar a uma das seguintes formas de Jordan

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- ★ A matriz J_1 é formada por 1 bloco de Jordan de 4a. ordem .
Nesse caso, existe um único autovetor associado ao autovalor λ .
- ★ A matriz J_2 é formada por 2 blocos de Jordan de 2a. ordem .
Nesse caso, existem 2 autovetores associados ao autovalor λ .
- ★ As matrizes J_3 e J_4 são formadas por 1 bloco de Jordan de 1a. ordem e 1 bloco de Jordan de 3a. ordem .
Novamente, nesse caso, existem 2 autovetores associados ao autovalor λ .

A seguir vamos revisar, através de exemplos, o método de determinação da forma de Jordan de uma matriz.

Exemplo 9 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores repetidos : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Os **autovetores associados** são obtidos resolvendo-se

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

Solução única : $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para se determinar um vetor v_2 tal que

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

e

$$J = M^{-1}AM$$

recorremos à utilização dos denominados **autovetores generalizados**.

Definição. Os autovalores generalizados g_i associados ao autovalor λ são obtidos utilizando-se o seguinte procedimento

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$Ag_1 = \lambda g_1 + v$$

$$(A - \lambda I)g_1 = v$$

$$Ag_2 = \lambda g_2 + g_1$$

$$(A - \lambda I)g_2 = g_1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Nota. Utilizando notação matricial, podemos escrever

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} v & g_1 & g_2 \end{bmatrix}}_M = AM = \begin{bmatrix} \lambda v & \lambda g_1 + v & \lambda g_2 + g_1 \end{bmatrix}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
 AM &= \begin{bmatrix} \lambda v & \lambda g_1 + v & \lambda g_2 + g_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda v & \lambda g_1 & \lambda g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v & g_1 \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} v & g_1 & g_2 \end{bmatrix}}_M \Lambda + \begin{bmatrix} 0 & v & g_1 \end{bmatrix} \\
 &= M\Lambda + \begin{bmatrix} 0 & v & g_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{bmatrix} 0 & v & g_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v & g_1 & g_2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_0} = MJ_0$$

Portanto,

$$\begin{aligned}AM &= M\Lambda + MJ_0 \\ &= M(\Lambda + J_0) \\ &= MJ\end{aligned}$$

$$J = \Lambda + J_0$$

$$A = MJM^{-1}$$

Voltando ao exemplo...

Precisamos determinar um **autovetor generalizado** v_2 a partir da equação

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Nota. Será que poderia ser

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} ?$$

Podemos agora verificar que a matriz M encontrada,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

tem a propriedade requerida :

$$\begin{aligned} J &= M^{-1} A M \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 10 Considere agora a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ★ Essa matriz já se encontra na forma de Jordan.
- ★ O autovalor $\lambda = 1$ tem multiplicidade 3.

Os autovetores associados são obtidos resolvendo-se

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

2 soluções :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos determinar apenas um **autovetor generalizado** v_3 ,

$$(A - \lambda I)v_3 = v_1$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Note que não existe um autovetor generalizado associado a v_2 .

A equação

$$(A - \lambda I)v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_2$$

não tem solução!

Verificação :

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como era esperado!

Importante :

- ★ Observe a ordem dos autovetores na matriz M .
- ★ O autovetor generalizado v_3 aparece logo após o autovetor v_1 , que é o autovetor ao qual está associado e a partir do qual foi gerado.

Exemplo 11 (Questão da prova 1o. período/2002)

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine a transformação de similaridade que a coloque na forma de Jordan.

Solução. A matriz dada está na forma triangular por blocos

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Autovalores: $\lambda = 1$ com multiplicidade 4.

Os autovetores associados são obtidos resolvendo-se

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0.$$

Encontramos 2 autovetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos de 2 **autovetores generalizados** v_3 e v_4 .

Vamos tentar obtê-los a partir de v_1 :

$$(A - \lambda I)v_3 = v_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)v_4 = v_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Não existe autovetor generalizado associado à v_2 .

A equação $(A - \lambda I)v_3 = v_2$ não tem solução!

$$(A - \lambda I)v_3 = v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = ?$$

Portanto, a matriz pedida é:

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_4 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificação :

$$J = M^{-1}AM$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12 (Questão da prova 1o. período/20023)

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine a transformação de similaridade que a coloque na forma de Jordan.

Solução. A matriz dada está na forma triangular por blocos

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Autovalores: $\lambda = 1$ com multiplicidade 4 (basta uma simples inspeção !)

Os **autovetores associados** são obtidos resolvendo-se

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0.$$

Encontramos 2 autovetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos de 2 **autovetores generalizados** v_3 e v_4 .

Vamos tentar obtê-los a partir de v_1 :

$$(A - \lambda I)v_3 = v_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)v_4 = v_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_4 = \begin{bmatrix} ? \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ v_4 não pode ser derivado de v_3 !

Vamos tentar derivar v_4 a partir de v_2 :

$$(A - \lambda I)v_4 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_4 = \begin{bmatrix} ? \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ v_4 também não pode ser derivado de v_2 !

Problema: Como obter v_4 ?

Solução: Só resta **escolher outro** autovetor generalizado v_3 .

$$(A - \lambda I)v_3 = v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)v_4 = v_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Ok. Desta vez foi !

Portanto, a matriz pedida é:

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_4 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificação :

$$J = M^{-1}AM$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.12 Funções de matrizes

(...)

6.13 Teorema de Cayley-Hamilton

(...)

6.14 Equação de Lyapunov

Equação de Sysvester :

$$AM + MB = C$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Equação de Lyapunov :

$$AM + MA^T = C$$

★ A equação de Sylvester é linear em M .

★ Pode ser escrita na forma de um sistema de equações lineares.

Exemplo 13

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

A equação acima pode ser escrita como :

$$A \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

ou melhor :

$$\begin{cases} Am_1 + b_{11}m_1 + b_{21}m_2 = c_1 \\ b_{12}m_1 + b_{22}m_2 + Am_2 = c_2 \end{cases}$$

Rearranjando os termos :

$$\begin{cases} (A + b_{11}I)m_1 + (b_{21}I)m_2 = c_1 \\ (b_{12}I)m_1 + (A + b_{22}I)m_2 = c_2 \end{cases}$$

Resultado :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

Expandindo :

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & a_{23} & 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{11} & 0 & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & 0 & a_{11} + b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 & a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{12} & a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

★ Sistema de $n \times m = 3 \times 2 = 6$ equações.

Fato. Os autovalores de $\mathcal{A}$ são todas as possíveis somas dos autovalores de A e de B .

Prova.

(...)

6.15 Formas quadráticas e positividade

Definição. (*Matriz simétrica*)

Uma matriz **real** M é dita **simétrica** se

$$M = M^T$$

Definição. (*Forma quadrática*)

Uma **forma quadrática** é uma função escalar

$$x^T M x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 14

Fato. Se M é simétrica, então

$$\boxed{x^* M x \in \mathbb{R}}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

★ x^* denota transposta conjugada .

Prova.

$$(x^* M x)^* = x^* M^* x = x M^* x^* = x M x^*$$

Portanto,

$$(x^* M x)^* = x M x^* \Rightarrow \boxed{x^* M x \in \mathbb{R}}$$

★ $x^* M x$ é real para qualquer x complexo.

Fato. Se M é simétrica, então

$$\lambda_i(M) \in \mathbb{R}$$

★ Em outras palavras, os **autovalores** de uma matriz real simétrica são **reais**.

Prova.

v = autovetor

λ = autovalor

$$\underbrace{v^* M v}_{\in \mathbb{R}} = v^* \lambda v = \lambda \underbrace{(v^* v)}_{\in \mathbb{R}}$$

Portanto,

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplo 15

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Equação característica : $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$

Condição para raízes complexas :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + c)^2 - 4(ac - b^2) \\ &= (a - c)^2 + 4b^2 < 0 \end{aligned}$$

Portanto, as raízes somente podem ser reais.

Fato. Toda matriz real simétrica M pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade mesmo que tenha autovalores repetidos.

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ M = M^T \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\exists Q \mid QMQ^{-1} = \Lambda}$$

Prova.Suponha que x seja um **autovetor generalizado** de M ,

$$(M - \lambda I)v = 0 \quad (\text{autovetor})$$

$$(M - \lambda I)x = v \quad (\text{autovetor generalizado})$$

Note que,

$$(M - \lambda I)x = v$$

$$(M - \lambda I)^2 x = (M - \lambda I)v = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} (M - \lambda I)^2 x = 0 \\ (M - \lambda I)x \neq 0 \end{cases}$$

Seja

$$\begin{aligned} [(M - \lambda I)x]^T [(M - \lambda I)x] &= x^T (M^T - \lambda I)(M - \lambda I)x \\ &= x^T (M - \lambda I)^2 x \end{aligned}$$

Usando $(M - \lambda I)^2 x = 0$: $x^T (M - \lambda I)^2 x = 0$

Usando $(M - \lambda I)x \neq 0$: $x^T (M - \lambda I)^2 x \neq 0$

★ Contradição !

★ $\nexists x$ autovetor generalizado.

★ $\exists Q \mid QMQ^{-1} = \Lambda.$

Exemplo 16

Definição. (*Matriz ortogonal*)

Uma matriz A é **ortogonal** se

$$A^T A = I$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = A^T$$

Exemplo 17

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 18

Teorema. Para toda matriz simétrica M , $\exists Q$ ortogonal tal que

$$QMQ^{-1} = \Lambda$$

Prova.Nosso ponto de partida é a decomposição espectral de M :

$$\begin{aligned} M &= Q^{-1} \Lambda Q \\ &= (Q^{-1} \Lambda Q) \\ &= Q^T \Lambda (Q^T)^{-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q^{-1} \Lambda Q &= Q^T \Lambda (Q^T)^{-1} \\ \Lambda &= Q Q^T \Lambda (Q^T)^{-1} Q^{-1} \\ &= \underbrace{(Q Q^T)}_I \Lambda \underbrace{(Q Q^T)^{-1}}_I \end{aligned}$$

★ A identidade acima somente é verificada para $Q^T = Q^{-1}$.

Exemplo 19

Definição. (*Definida positiva*)

Uma matriz simétrica M é dita **definida positiva** se

$$\boxed{x^T M x > 0}, \quad \forall x \neq 0.$$

★ $x^T M x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Definição. (*Semi-definida positiva*)

Uma matriz simétrica M é dita **semi-definida positiva** se

$$\boxed{x^T M x \geq 0}, \quad \forall x \neq 0.$$

★ $\exists x \neq 0 \mid x^T M x = 0.$

Exemplo 20

Teorema. Uma matriz simétrica M é DP (SDP) sse uma das seguintes condições é verificada :

1. $\lambda_i(M) > 0 \quad (\geq 0)$
2. $\Delta_i(M) > 0 \quad (\geq 0)$
3. $\exists N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular $(\exists N \in \mathbb{R}^{m \times n})$ tal que $M = N^T N$.

★ $\Delta_i(M)$ são os menores principais de M .

Prova.

(...)

Exemplo 21

Exemplo 22

Teorema. Uma matriz $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, tem rank n sse

$$\det(H^T H) \neq 0$$

Prova.

(...)

Exemplo 23 $H \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ e $\text{rank}(H) = 2$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow H^T H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorema. Uma matriz $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, tem rank m sse

$$\det(HH^T) \neq 0$$

Prova.

(...)

Exemplo 24 $H \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ e $\text{rank}(H) = 2$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow HH^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

6.16 Inversão de matrizes

Método de inversão de Shipley

- ★ Uma operação chamada **pivotagem** é executada em cada elemento da diagonal principal em qualquer ordem.
- ★ No instante da pivotagem, o elemento usado **não pode ser nulo**.
- ★ Elementos nulos na diagonal devem ser **“saltados”**. Só podem ser usados como pivôs quando forem transformados em elementos não nulos pelo processo.

Algoritmo. As operações de pivotagem devem ser executadas uma **única vez** para cada elemento da diagonal.

- (1) Todos os elementos que não estejam na mesma linha ou coluna do pivô a_{kk} são modificados por:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \frac{a_{kj}}{a_{kk}}$$

$$A = \begin{bmatrix} & a_{ij} & a_{ik} & \\ a_{kj} & a_{kk} & \\ & & \end{bmatrix}$$

(2) Os elementos da mesma linha do pivô a_{kk} são substituídos por:

$$a'_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{kk}}$$

(3) Os elementos da mesma coluna do pivô a_{kk} são substituídos por:

$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

(4) O elemento pivô a_{kk} é substituído por:

$$a'_{kk} = -\frac{1}{a_{kk}}$$

- ★ O processo é repetido para todos os elementos da diagonal tomados em qualquer ordem.
- ★ Terminado o processo, a matriz original é substituída pela negativa da inversa :

$$[a'_{ij}] = -A^{-1}$$

Exemplo 25

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Escolhemos $1^{\text{o.}} \text{ pivô} = a_{33}$.

$$1^{\text{a.}} \text{ pivotagem : } \left\{ A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1 \\ 7/2 & 2 & -1/2 \\ -3/2 & -1 & -1/2 \end{array} \right] \right.$$

Escolhemos 2o.pivô = a_{22} .

$$\text{2a. pivotagem : } \left\{ A_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1/2 & -1 & -1/2 \\ \hline -7/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{array} \right] \right.$$

Finalmente, 3o.pivô = a_{11} .

$$\text{3a. pivotagem : } \left\{ A_3 = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 2 & 1 \\ 7/2 & -4 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{array} \right] \right.$$

Resultado :

$$A^{-1} = -A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -7/2 & 4 & 3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

[Ref.] Homer & Brown,
Grandes sistemas eléctricos,
LTC, 1975.

6.17 Algoritmo de *Leverrier*

(...)

Exercício.

1. Encontre a forma de Jordan das seguintes matrizes

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício.

1. Verifique que para o bloco de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 7

7 Análise

Conteúdo

1. Estabilidade
2. Controlabilidade
3. Observabilidade

7.1 Estabilidade

- Introdução
- Estabilidade entrada/saída
 - Definições: [*Sinal limitado*] [*Estabilidade BIBO*]
 - Teoremas: [*Estabilidade BIBO*] [*Resposta em regime*] [*FT BIBO*]
- Estabilidade interna
 - Definições: [*Ponto de equilíbrio*] [*Estabilidade Lyapunov*]
 - Teoremas: [*Estabilidade marginal*] [*Estabilidade assintótica*]
- Método de Lyapunov
 - Teoremas: [*E*] [*EA*] [*EAG*]
 - Exemplos: [*1*] [*2*]
 - Teorema. *Unicidade da solução*
 - Exemplos: [*3*] [*4*] [*5*]

Introdução

★ Estabilidade é uma propriedade **fundamental** para qualquer sistema.

Propriedade. A resposta de um SLIT pode ser decomposta como

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta de um SLIT} \\ y(t) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta com} \\ x(0) = 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Resposta com} \\ u(t) \equiv 0 \\ \hline \end{array}$$

★ Podemos estudar a estabilidade de cada resposta separadamente:

Estabilidade BIBO } $\rightarrow$ para resposta com $x(0) = 0$

Estabilidade marginal } $\rightarrow$ para resposta com $u(t) \equiv 0$
Estabilidade assintótica }

Estabilidade entrada/saída

Modelo do SLIT :

$g(t)$ = resposta ao impulso.

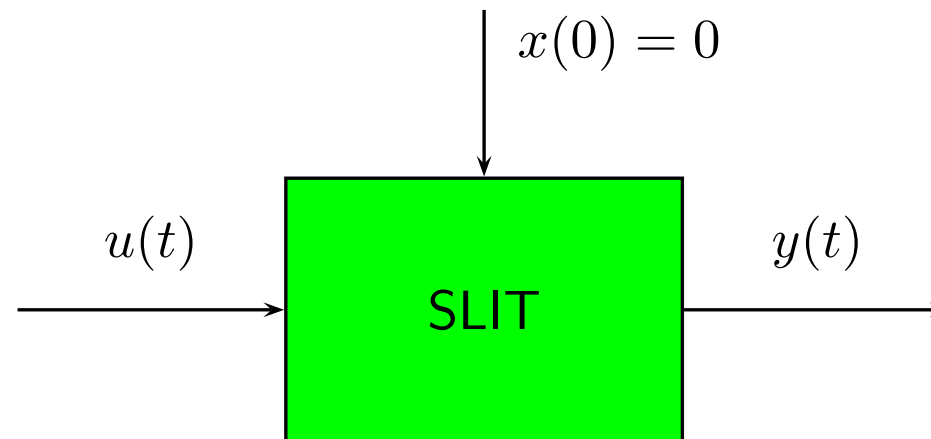


Figura 15: Resposta com estado nulo.

A resposta é dada pela **convolução** :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau)g(\tau)d\tau \end{aligned}$$

★ $g(t)$ = resposta ao impulso aplicado em $t = 0$ com $x(0) = 0$.

★ A convolução é **comutativa**.

Definição. (*Sinal limitado*)

Um sinal $z(t)$ é dito **limitado** ou ***bounded*** se existe uma constante z_m tal que

$$|z(t)| \leq z_m < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

Definição. (*Estabilidade BIBO*)

Um sistema é dito **BIBO estável** se, para **toda entrada** limitada, a saída é limitada.

Nota. Lembrar que as **c.i.'s são nulas !**

Teorema. *(BIBO estabilidade)*

BIBO estabilidade $\Leftrightarrow g(t)$ absolutamente integrável .

Prova. ($\Leftarrow$)

$$\star \quad g(t) \text{ abs. integrável} \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty |g(t)| dt \leq M < \infty}$$

$$\begin{aligned} \boxed{y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau} &\Rightarrow |y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |g(\tau)| \underbrace{|u(t - \tau)|}_{\leq u_m} d\tau \\ &\leq u_m \underbrace{\int_0^t |g(\tau)| d\tau}_{\leq M} \\ &\leq u_m M < \infty. \end{aligned}$$

Exercício. Provar ($\Rightarrow$).

Fato.

$f(t)$ absolutamente integrável $\nRightarrow f(t) \rightarrow 0$.

Fato.

$f(k)$ absolutamente somável $\Leftrightarrow f(k) \rightarrow 0$.

Exemplo 1

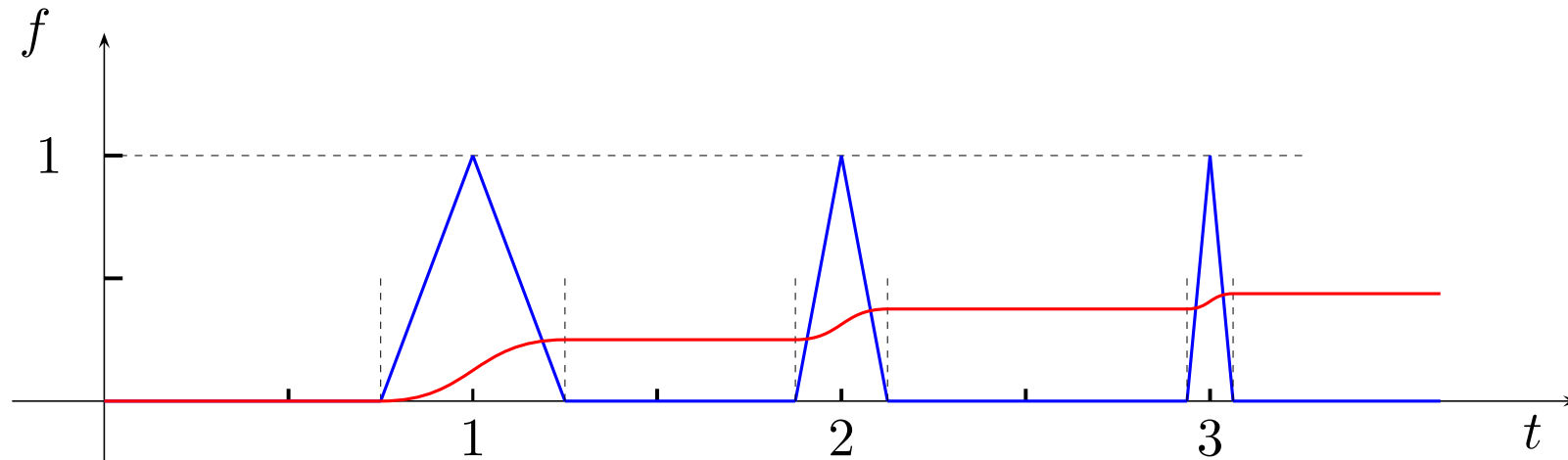


Figura 16: Função solução.

Neste exemplo,

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt \leq M < \infty, \quad \text{porém,}$$

$$f(t) \not\rightarrow 0.$$

Exemplo 2

$$\dot{f} \rightarrow 0$$

 $\nRightarrow$ f converge

$$f(t) = \sin(\log(t))$$

$$\dot{f}(t) = \frac{\cos(\log(t))}{t}$$

 $(\rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty)$

Ref.: (Slotine & Li 1991), pag. 124.

MATLAB : Script **exemplo4.m**.

Exemplo 3

$$\dot{f} \rightarrow 0$$

 $\not\equiv$ f converge

$$f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t}) \quad (\rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty)$$

$$\dot{f}(t) = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + 2e^t \cos(e^{2t}) \quad (\rightarrow \infty \text{ para } t \rightarrow \infty)$$

Ref.: (Slotine & Li 1991), pag. 124.

MATLAB : Script **exemplo4.m**.

Teorema. *(Resposta em regime)*

Se um sistema com resposta ao impulso $g(t)$ é BIBO estável,
então :

$$(1) \quad u(t) \equiv a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0)a}$$

$$(2) \quad u(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j\omega_0)| \sin\left(\omega_0 t + \text{fase}[G(j\omega_0)]\right)}$$

$$\star \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)].$$

$$\star \quad G(0) = \text{ganho DC.}$$

Exercício. Provar.

Nota. Este é um resultado básico!

$e^{j\omega t}$ é uma autofunção do sistema.

Ref. : Oppenheim & Schafer , 1989, pag. 39.

Teorema. *(Função de transferência BIBO)*

Um SLIT com função de transferência $G(s)$ é BIBO estável sse todos os pólos de $G(s)$ têm **parte real negativa**.

$$\text{BIBO estável} \Leftrightarrow \text{Re}\{\text{pólos}\} < 0$$

Exercício. Provar.

(...)

Estabilidade interna

Seja o sistema com entrada $u(t) \equiv 0$:

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}, \quad f(0) = 0.$$

(...)

Definição. *(Ponto de equilíbrio)*

x° é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ sse

$$f(x^\circ) = 0.$$

Nota. Também denominado ponto singular ou ponto crítico.

Definição. *(Estabilidade Lyapunov)*

O ponto de equilíbrio x° de $\dot{x} = f(x)$ é **estável** no sentido de Lyapunov se

$$\forall \varepsilon > 0$$

,

$$\exists \delta > 0$$

,

tal que

$$\|x(0) - x^\circ\| < \delta$$

$\Rightarrow$

$$\|x(t) - x^\circ\| < \varepsilon$$

,

$$\forall t > 0.$$

Nota. Raciocínio δ/ε .

Exemplo 4 Oscilador harmônico

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} x$$

Equação característica : $s^2 + \omega^2 = 0$, $\omega^2 = -(a^2 + bc)$

Autovalores : $\lambda_1 = \sqrt{-(a^2 + bc)}$,

$$\lambda_2 = -\sqrt{-(a^2 + bc)}$$

- ★ Este sistema tem um único equilíbrio $x^\circ = 0$.
- ★ Usando a definição, verifica-se que x° é estável .
- ★ Neste caso, diz-se que o sistema é estável .

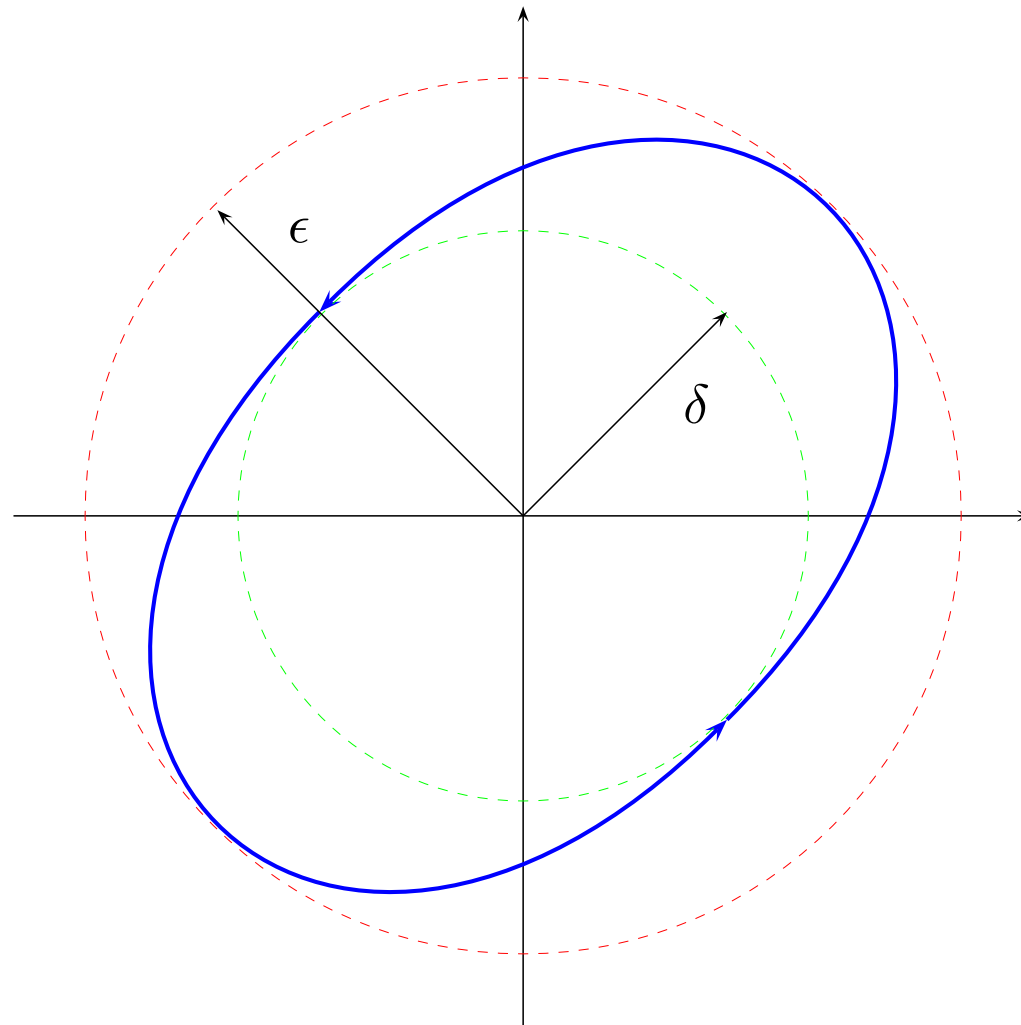


Figura 17: Plano de fase para $a = 1$ e $bc = -4$.

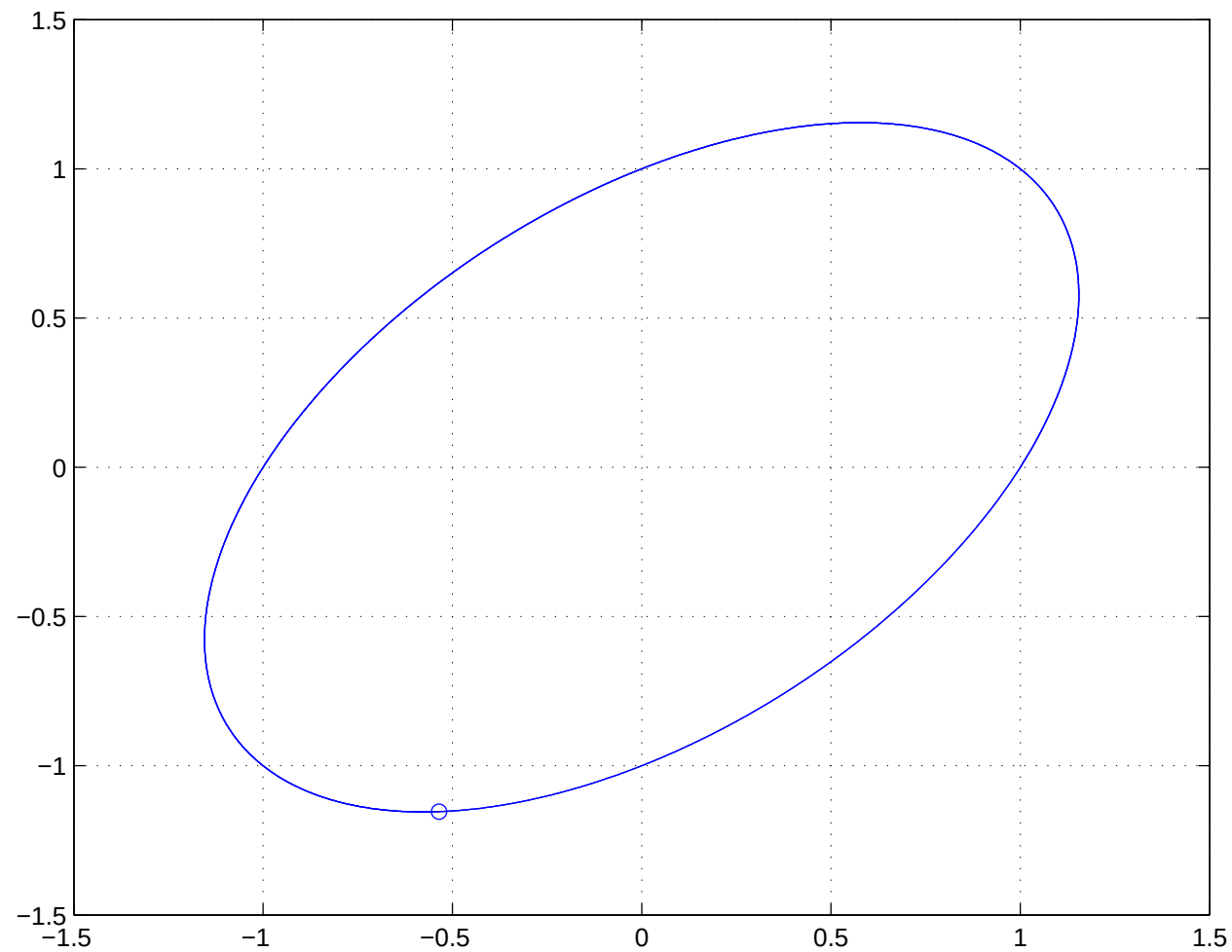


Figura 18: Resultado de simulação usando MATLAB.

(Script: [fig1.m](#))

Teorema. *(Estabilidade marginal)*

O sistema $\dot{x} = Ax$ é **marginalmente estável** sse $\exists \lambda_i(A)$ tal que

(1) $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) = 0$

(2) o bloco de Jordan associado é de 1a. ordem.

Exemplo 5

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

- ★ A matriz A possui 3 autovalores : $\lambda = \{0, 0, -1\}$.
- ★ Todos os autovalores são simples $\Rightarrow$ blocos de Jordan de 1a. ordem.
- ★ O sistema é **marginalmente estável**.

Exemplo 6

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

- ★ A matriz A possui 3 autovalores : $\lambda = \{0, 0, -1\}$.
- ★ O autovalor 0 tem bloco de Jordan associado de 2a. ordem.
- ★ O sistema é instável.

Teorema. *(Estabilidade assintótica)*

O sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável sse $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$.

Prova. Para toda matriz A , $\exists M$ tal que

$$\dot{\tilde{x}} = J\tilde{x}$$

$$J = M^{-1}AM$$

A solução é :

$$\tilde{x}(t) = e^{Jt}\tilde{x}(0)$$

A matriz J é composta por blocos de Jordan de ordem i da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (i = 3)$$

Matriz $e^{J_i t}$ correspondente :

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Elementos de $e^{J_i t}$ limitados

$\Rightarrow$

$\tilde{x}(t)$ limitado

Portanto,



$$\text{Re}(\lambda) < 0$$

$\Rightarrow$

estabilidade assintótica .



$$\text{Re}(\lambda) = 0$$

e

$$i = 1$$

$\Rightarrow$

estabilidade marginal .

Fato.

Estabilidade assintótica $\Rightarrow$ estabilidade BIBO.

Fato.

Estabilidade assintótica $\nRightarrow$ estabilidade BIBO.

Método de Lyapunov

- ★ É um método geral para análise de estabilidade.
- ★ Aplica-se a sistemas contínuos e discretos.
- ★ Aplica-se a sistemas lineares e não-lineares.

Teorema. *(Estabilidade)*

O ponto de equilíbrio x^o é **estável (E)** se existir uma função $V(x)$ tal que

- (1) $V(x)$ é contínua em x
- (2) $V(0) = 0$
- (3) $V(x) > 0$
- (4) $\dot{V}(x) \leq 0$

Nota. A função $V(x)$ é denominada **Função de Lyapunov**.

Nota. A função $V(\cdot)$ satisfaz quase todas as propriedades de uma **norma**.

Interpretação.

- ★ $V(x)$ pode ser vista como a distância de $x(t)$ do equilíbrio.
- ★ $\dot{V}(x) \leq 0$ assegura que essa distância não está aumentando.

Teorema. *(Estabilidade assintótica)*

Se

$$(4) \quad \dot{V}(x) < 0$$

então a solução é assintoticamente estável (AE).

Nota. $\dot{V}(x) < 0$ assegura que a distância está diminuindo.

Problema. *(Falta de homogeneidade)*

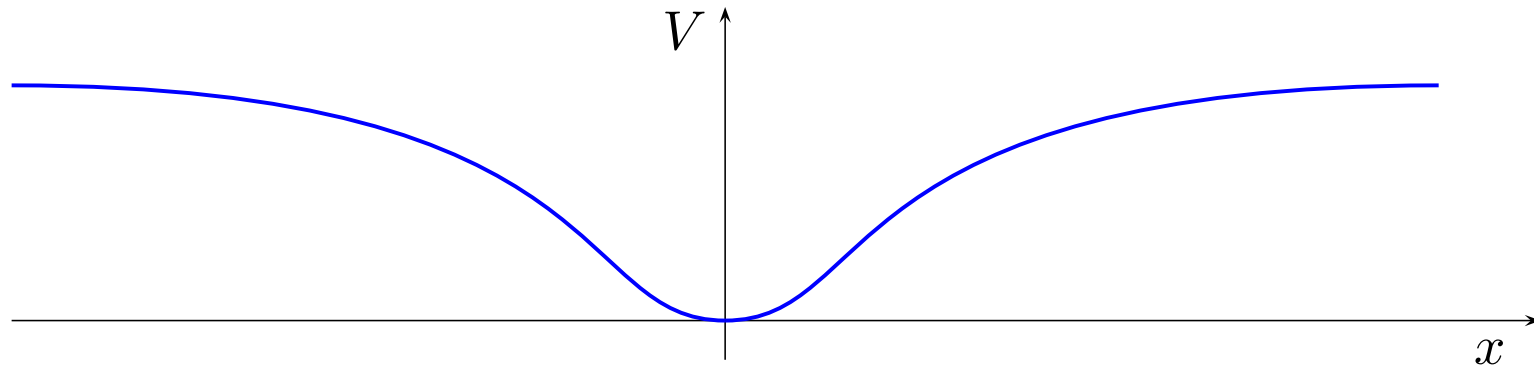


Figura 19: Função de Lyapunov $V(x) \leq V_{max}$.

★ Neste caso pode-se ter $x \rightarrow \infty$ e $V(x) \leq V_{max}$.

★ $V(x)$ não acusa que $x \rightarrow \infty$!

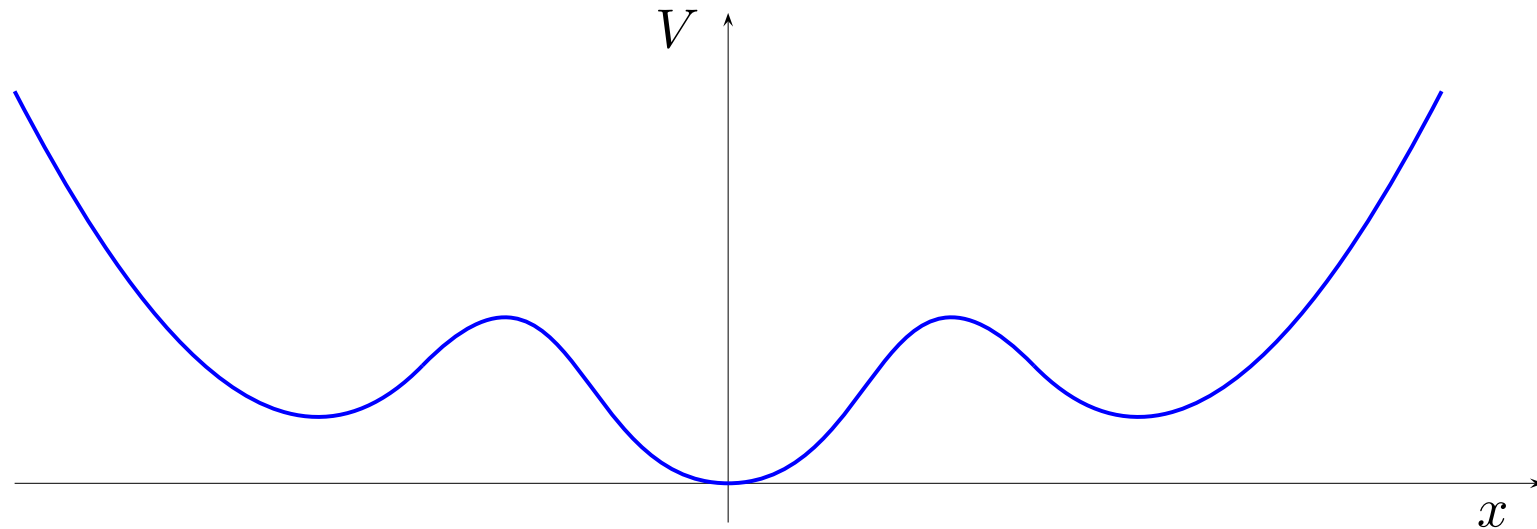
Problema.

Figura 20: Função de Lyapunov com inversão.

★ Neste exemplo x aumenta e $V(x)$ decresce .

★ Não basta ter $V(x) \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow \infty$!

Teorema. *(Estabilidade assintótica global)*

Se

$$(5) \quad V(x) > \phi(\|x\|) > 0, \quad \phi(\|x\|) \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad x \rightarrow \infty,$$

então a solução é $AE \forall x(0)$, i.e., globalmente AE (GAE).

Nota. A estabilidade é um conceito local.

Importante :

- ★ A dificuldade do método de Lyapunov é achar $V(x)$.
- ★ No caso de sistemas lineares esta busca é relativamente mais simples.

Basta escolher uma **forma quadrática** em x .

Exemplo 7 Considere o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = ax$$

Escolhemos a função de Lyapunov :

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Derivando :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = x\dot{x} = ax^2$$

Portanto : condição para **E** :

$$a \leq 0$$

condição para **EA** :

$$a < 0$$

Exemplo 8 Considere agora um sistema de ordem n

$$\dot{x} = Ax$$

Escolhemos a função de Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

Derivando :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P A x + (A x)^T P x \\ &= x^T \underbrace{(P A + A^T P)}_{-Q} x = -x^T Q x \end{aligned}$$

Portanto : condição para E :

$$Q = Q^T \geq 0$$

condição para EA :

$$Q = Q^T > 0$$

Teorema. *(Unicidade da solução da equação de Lyapunov)*

Para o sistema $\dot{x} = Ax$,

$$\boxed{\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\forall Q = Q^T > 0} , \\ \boxed{\exists! P = P^T > 0} \\ \text{tal que } \boxed{PA + A^T P = -Q} . \end{array} \right.$$



$$\boxed{PA + A^T P = -Q}$$

é denominada **equação de Lyapunov**.

Prova. ($\Rightarrow$)

Equação de Lyapunov :

$$PA + A^T P = -Q$$

Podemos escrever : $e^{A^T t} [PA + A^T P] e^{At} = -e^{A^T t} [Q] e^{At}$

ou melhor :

$$\frac{d}{dt} [e^{A^T t} P e^{At}] = -e^{A^T t} Q e^{At}$$

Lembrete :

$$\frac{d}{dt} [e^{At}] = A e^{At}$$

$$\frac{d}{dt} [e^{A^T t}] = \frac{d}{dt} [e^{At}]^T = [A e^{At}]^T = e^{A^T t} A^T$$

Integrando ambos os lados : $\left[e^{A^T t} P e^{A t} \right] \Big|_0^\infty = - \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$

Se $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ então $e^{A t} = 0$ para $t = \infty$.

Portanto : $0 - P = - \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$

ou melhor :

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

★ Dadas A e Q , a fórmula acima fornece a matriz P correspondente.

Vamos mostrar a **unicidade** por contradição.

Suponha que existam 2 soluções **P_1** e **P_2** :

$$\left. \begin{array}{l} P_1 A + A^T P_1 = -Q \\ P_2 A + A^T P_2 = -Q \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{(P_1 - P_2)A + A^T(P_1 - P_2) = 0}$$

Então :

$$e^{A^T t} \left[(P_1 - P_2)A + A^T(P_1 - P_2) \right] e^{At} = 0$$

ou melhor :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[e^{A^T t} (P_1 - P_2) e^{At} \right] = 0}$$

Integrando : $\left[e^{A^T t} (P_1 - P_2) e^{At} \right] \Big|_0^\infty = 0$

Como $e^{At} = 0$ para $t = \infty$, tem-se : $0 - (P_1 - P_2) = 0$

★ Quer dizer, $P_1 = P_2$. A solução é única.

É fácil ver que

$$\boxed{Q = Q^T} \Rightarrow \boxed{P = P^T}$$

De fato :

$$Q = Q^T \Rightarrow [e^{A^T t} Q e^{At}] = [e^{A^T t} Q e^{At}]^T$$

e portanto

$$P = \int_0^\infty [e^{A^T t} Q e^{At}] dt = \int_0^\infty [e^{A^T t} Q e^{At}]^T dt = P^T$$

$$Q = Q^T > 0$$

 $\Rightarrow$

$$Q = N^T N$$

 $, \quad N \text{ não-singular.}$

Portanto :

$$P = \int_0^\infty [e^{A^T t} Q e^{At}] dt$$

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T [e^{A^T t} N^T N e^{At}] x dt$$

$$= \int_0^\infty [N e^{At} x]^T [N e^{At} x] dt$$

$$= \int_0^\infty \|N e^{At} x\|_2^2 dt$$

$$\star \quad x \neq 0 \Rightarrow \|N e^{At} x\| > 0 \Rightarrow x^T P x > 0 \Rightarrow P = P^T > 0 .$$

($\Leftarrow$) Seja λ um autovalor de A e v o autovetor associado :

$$Av = \lambda v \Rightarrow v^{*T} A^T = \lambda^* v^{*T}$$

Equação de Lyapunov :

$$PA + A^T P = -Q$$

Podemos escrever : $v^{*T} [PA + A^T P] v = -v^{*T} [Q] v$

ou melhor :

$$\begin{aligned} -v^{*T} Q v &= \underbrace{(v^{*T} A^T)}_{\lambda^* v^{*T}} P v + v^{*T} P \underbrace{(Av)}_{\lambda v} \\ &= (\lambda^* v^{*T}) P v + v^{*T} P (\lambda v) \\ &= (\lambda^* + \lambda) v^{*T} P v \\ &= 2\text{Re}(\lambda) v^{*T} P v \end{aligned}$$

Se :

$$P = P^T > 0$$

e

$$Q = Q^T > 0$$

então :

$$-\underbrace{v^{*T} Q v}_{>0} = 2\text{Re}(\lambda) \underbrace{v^{*T} P v}_{>0}$$

Portanto :

$$\text{Re}(\lambda) < 0$$

Exemplo 9 Para o sistema linear descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x ,$$

escolhemos a função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x , \text{ onde}$$

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \alpha > 1 .$$

Encontre um valor de α que permita concluir a estabilidade assintótica do sistema dado.

Solução.

Equação de Lyapunov : $PA + A^T P = -Q$

Substituindo valores,

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & \alpha - 5 \\ \alpha - 5 & -2 \end{bmatrix} = -Q. \end{aligned}$$

Portanto :

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 5 - \alpha \\ 5 - \alpha & 2 \end{bmatrix} .$$

Um valor de α que garante $Q > 0$ é :

$$\alpha = 5$$

Pelo **lema de Sylvester**, a condição para a positividade de Q é

$$\Delta_1 = q_{11} = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \det(Q) = -\alpha^2 + 10\alpha - 13 > 0$$

Solução :

$$5 - 2\sqrt{3} < \alpha < 5 + 2\sqrt{3} .$$

Exemplo 10 Analise a estabilidade do sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x .$$

1. Utilize a expressão integral para a solução P .
2. Ache e resolva o sistema de equações lineares correspondente à equação de Lyapunov. (Vide : [[Revisão de álgebra linear: Equação de Lyapunov.](#)])

Solução.

(1) Escolhendo $Q = I$, tem-se :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} e^{At} dt = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$P = P^T > 0$$



o sistema é GAE .

Solução via MATLAB : Script `exemplo2.m` .

(2) Equação de Lyapunov :

$$A^T P + P A = -Q$$

Sistema de equações lineares equivalente :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A^T + a_{11}I & a_{21}I \\ a_{12}I & A^T + a_{22}I \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Para $Q = I$: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solução : $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = -\mathcal{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}}$

★ Mesmo resultado!

Solução via MATLAB : Script `exemplo5.m` .

Exemplo 11 Analise a estabilidade do sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Solução.

Escolhendo $Q = I$, tem-se :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} e^{A t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \cos^2(t) + \sin^2(t) & 0 \\ 0 & \cos^2(t) + \sin^2(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} \end{aligned}$$

★ Este sistema é um oscilador harmônico. Não é AE.

Solução via MATLAB : Script `exemplo3.m`.

Escolhendo $P = I$, tem-se :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T (PA + A^T P)x \\ &= x^T (A + A^T)x \\ &= x^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) x = 0\end{aligned}$$

★ Como $V > 0$ e $\dot{V} = 0$, concluí-se que o sistema é estável .

7.2 Controlabilidade ($\mathcal{C}_o$)

- Introdução
- Definição de $\mathcal{C}_o$
 - Exemplos: [1] [2] [3]
- Critérios de controlabilidade
 - Definições: [Matriz $\mathcal{C}$] [Matriz W_c] [Matriz Gramiana]
 - Teorema
 - Exemplos: [4] [5] [6] [7]
- Forma canônica $\mathcal{C}_o$
 - Propriedade
 - Teorema
 - Transformação para FC $\mathcal{C}_o$

Introdução

$$\text{SLIT : } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

★ **Controlabilidade** - Propriedade que diz quando o estado $x(t)$ pode ser “controlado” livremente através da entrada $u(t)$.

(...)

Definição de $\mathcal{C}o$

Definição. Um SLIT é dito **controlável** se

$$\forall x_0 = x(0) , \quad \forall x_1 ,$$

$$\exists u(t) \quad \text{tal que}$$

$$x(t_f) = x_1 , \quad t_f \text{ finito.}$$

★ Também se diz que o **par (A, B) é $\mathcal{C}o$** .

★ O sinal $u(t)$ não é único.

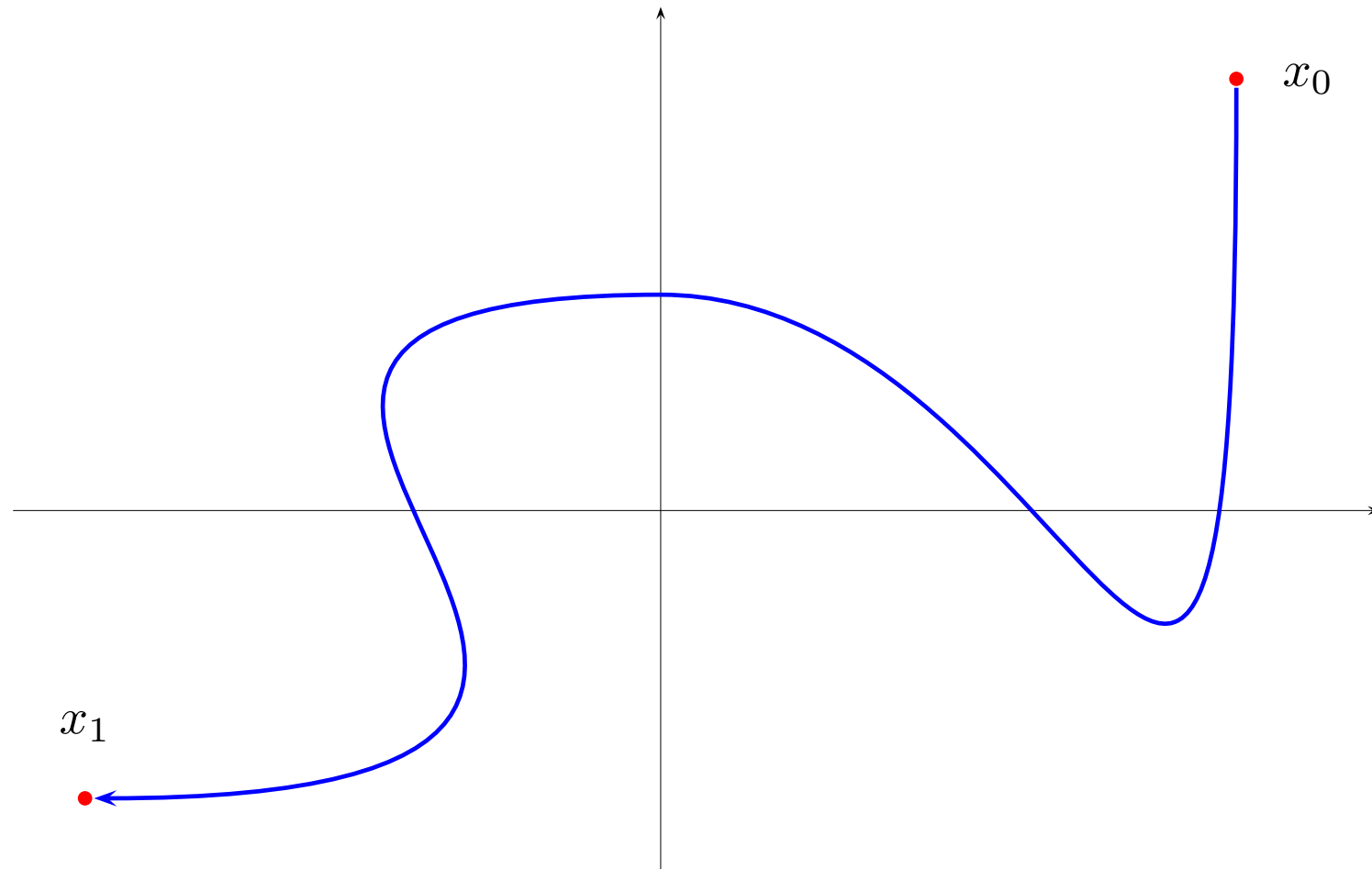
Interpretação

Figura 21: Interpretação geométrica.

Definição alternativa :

Definição. Um SLIT é dito **controlável** se

$$\forall x_0 = x(0) \quad ,$$

$$\exists u(t) \quad \text{tal que}$$

$$x(t_f) = 0 \quad , \quad t_f \text{ finito.}$$

★ Nesta definição, o estado final x_1 foi transladado para a origem.

★ Basta uma transformação de coordenadas.

Nova interpretação

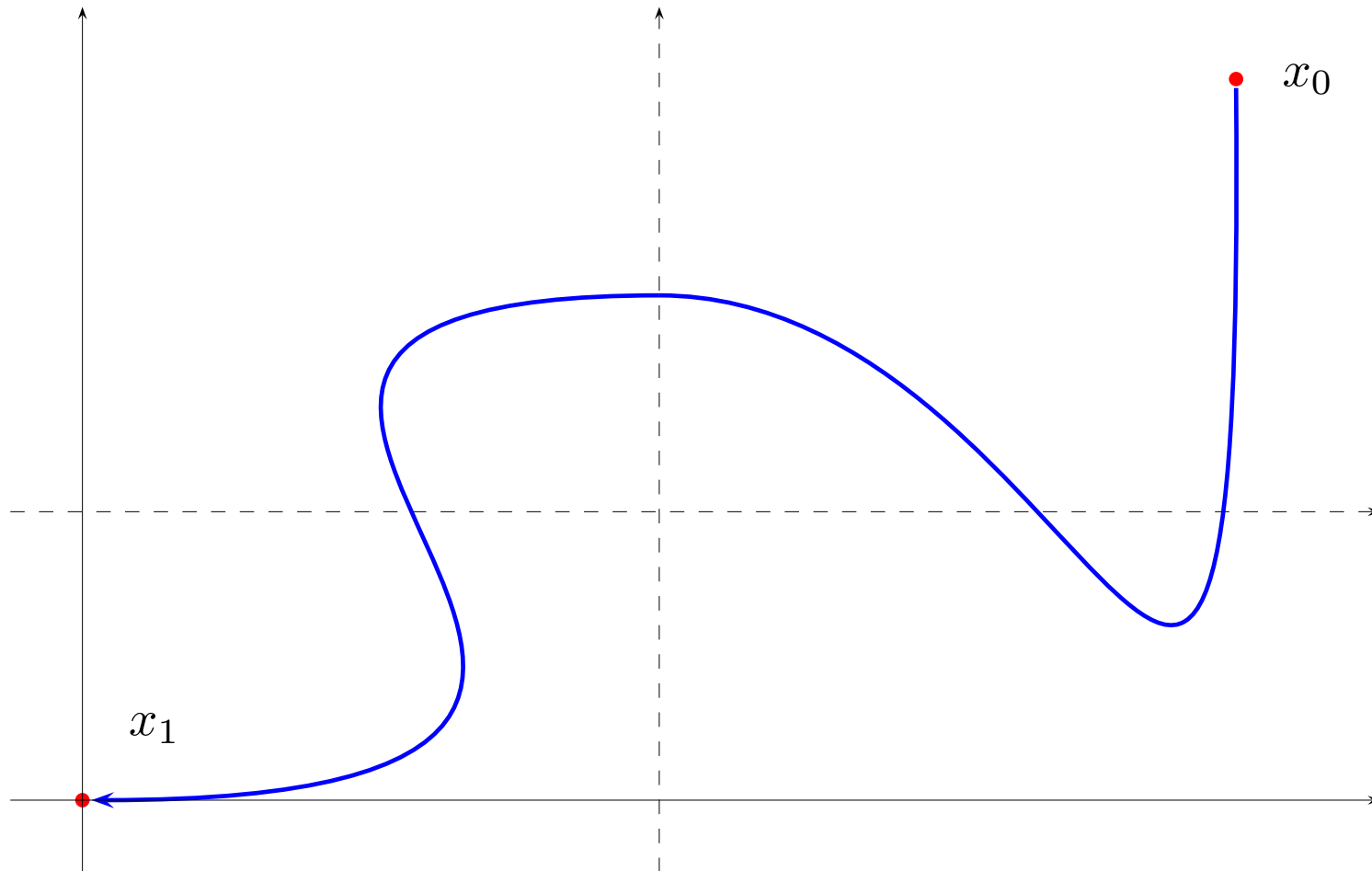


Figura 22: Interpretação geométrica.

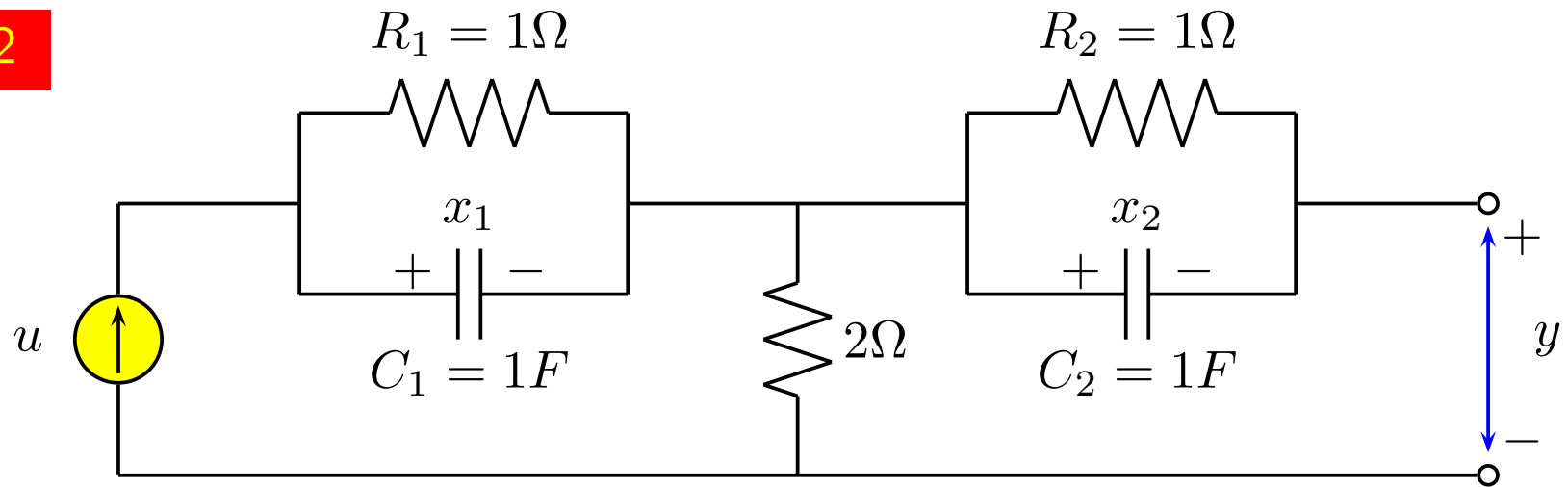
Pérolas

- Quando as condições iniciais pode ser alterado a depender do valor da entrada.
- Controlabilidade é a capacidade que um sistema tem de ser controlado por uma entrada.
- Um sistema é dito controlável se a entrada está ligada à sua função.

Pérolas

- Um sistema é controlável se em seus estados característicos houverem componentes da entrada (u).
- Um sinal limitado aplicado na entrada tem que gerar um sinal limitado na saída.
- Controlabilidade é quando a saída só depende da entrada $u(t)$.

Exemplo 12



u = corrente de entrada

y = tensão de saída

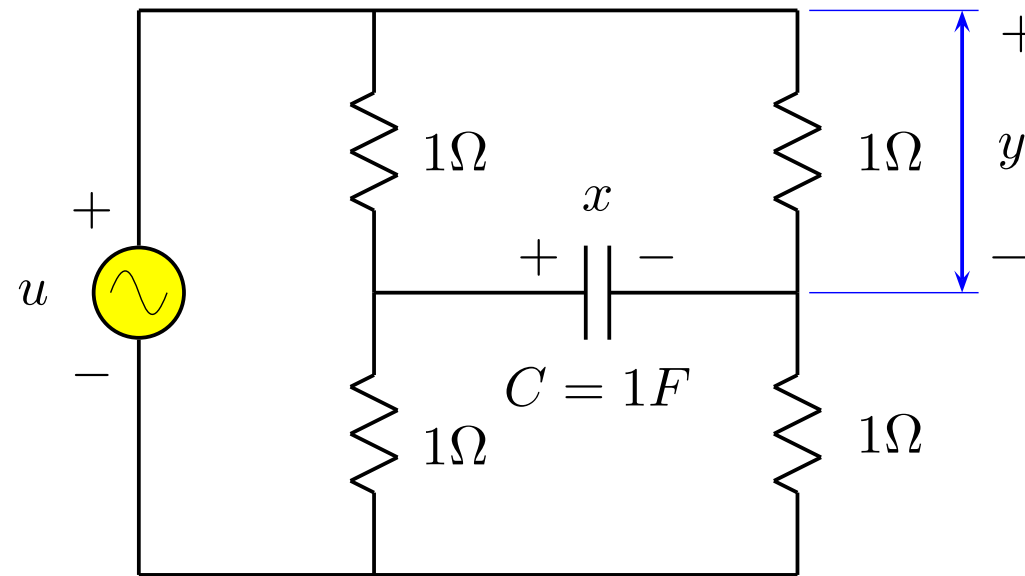
x_1 = tensão no capacitor C_1

x_2 = tensão no capacitor C_2

★ Circuito aberto.

★ Tensão x_2 não pode ser controlada pela corrente $u \Rightarrow$ SLIT $\overline{C_o}$.

Exemplo 13



u = tensão de entrada

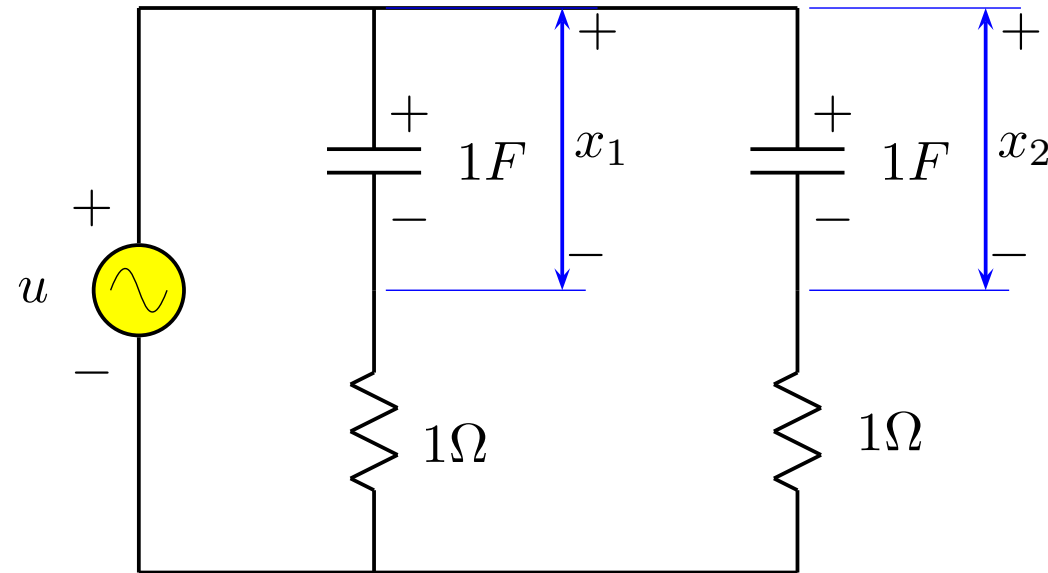
x = tensão no capacitor

y = tensão no resistor de 1Ω

★ Neste caso, $x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0, \forall t > 0.$

★ O estado x é $\overline{\mathcal{C}o} \Rightarrow \boxed{\text{SLIT } \overline{\mathcal{C}o}}.$

Exemplo 14



u = tensão de entrada

y = tensão no resistor de 1Ω

x_1 = tensão no capacitor $1F$

x_2 = tensão no capacitor $1F$

★ Neste caso, $x_1(0) = x_2(0) = 0 \Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \forall t > 0.$

★ SLIT $\overline{\mathcal{C}_o}$.

Critérios para $\mathcal{C}o$

- ★ A aplicação da definição não é muito prática.
- ★ Vamos introduzir critérios algébricos.

Definição. *(Matriz de controlabilidade)*

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

★ SISO : $\dim [\mathcal{C}] = n \times n$

★ MIMO : $\dim [\mathcal{C}] = n \times np$

Definição. *(Matriz $W_c(t)$)*

$$\begin{aligned} W_c(t) &= \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \\ &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

Definição. *(Matriz Gramiana)*

$$W_c := W_c(\infty) = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$



$$\dim [W_c] = n \times n$$

Teorema. As seguintes sentenças são equivalentes :

(1) O par (A, B) é *Co* .

(2) $\boxed{\text{rank}(\mathcal{C}) = n}$.

(3) A matriz $W_c(t)$ é não singular $\forall t > 0$.

(4) $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & | & B \end{bmatrix} \right) = n$ para todo autovalor λ de A .

(5) $\text{Re}(\lambda(A)) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists! W_c = W_c^T > 0 \quad (\text{matriz gramiana}) \\ \text{tal que} \quad AW_c + W_cA^T = -BB^T. \end{cases}$

Prova. (C. T. Chen 1999), p. 145

(...)

Fato. Se o par (A, B) é *Co*, então

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1) [e^{At_1} x_0 - x_1]$$

transfere o estado $x_0 = x(0)$ para $x_1 = x(t_1)$.

Exemplo 15

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Para este sistema :

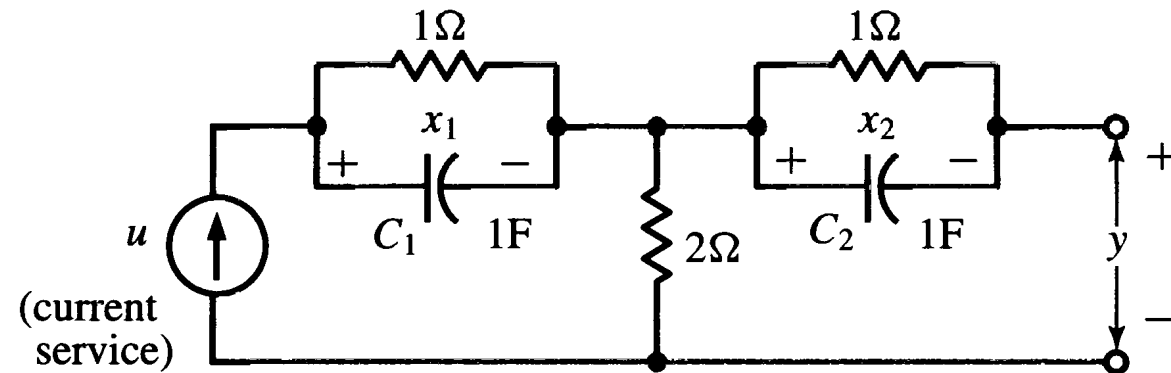
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{rank}(\mathcal{C}) = 4$$

 $\Rightarrow$
 $\mathcal{C}o$
 $.$

Exemplo 16



$R_1 = 1\Omega$ (em paralelo com C_1)

$R_2 = 1\Omega$ (em paralelo com C_2)

i_{R1}, v_{R1} = corrente e tensão em R_1

i_{R2}, v_{R2} = corrente e tensão em R_2

Lei dos nós :

$$\begin{cases} i_{R1} + i_{C1} = u \\ i_{R2} + i_{C2} = 0 \end{cases}$$

Lei das malhas :

$$\begin{cases} v_{R1} + x_1 = 0 \\ v_{R2} + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nós : } \begin{cases} i_{C_1} = u - i_{R_1} \\ i_{C_2} = -i_{R_2} \end{cases} \quad \text{Malhas : } \begin{cases} v_{R_1} = -x_1 \\ v_{R_2} = -x_2 \end{cases}$$

Tensão em R_1 :

$$v_{R_1} = R_1 i_{R_1} \Rightarrow \boxed{v_{R_1} = i_{R_1}}$$

Tensão em C_1 :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} (u - i_{R_1}) = \frac{1}{C_1} (u - v_{R_1}) \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} (u + x_1)}$$

$$\text{Nós : } \begin{cases} i_{C_1} = u - i_{R_1} \\ i_{C_2} = -i_{R_2} \end{cases} \quad \text{Malhas : } \begin{cases} v_{R_1} = -x_1 \\ v_{R_2} = -x_2 \end{cases}$$

Tensão em R_2 :

$$v_{R_2} = R_2 i_{R_2} \Rightarrow \boxed{v_{R_2} = i_{R_2}}$$

Tensão em C_2 :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} i_{C_2} = \frac{1}{C_2} (-i_{R_2}) = \frac{1}{C_2} (-v_{R_2}) \Rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_2}$$

$$\text{Nós : } \begin{cases} i_{C_1} = u - i_{R_1} \\ i_{C_2} = -i_{R_2} \end{cases}$$

$$\text{Malhas : } \begin{cases} v_{R_1} = -x_1 \\ v_{R_2} = -x_2 \end{cases}$$

Tensão de saída :

$$y = 2u - v_{R_2} \Rightarrow$$

$$y = x_2 + 2u$$

Equação de estado para o circuito :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} u$$

Para este sistema : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & (1/C_1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$\text{rank}(\mathcal{C}) = 1$$

 $\Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{C}o}$$

 $.$

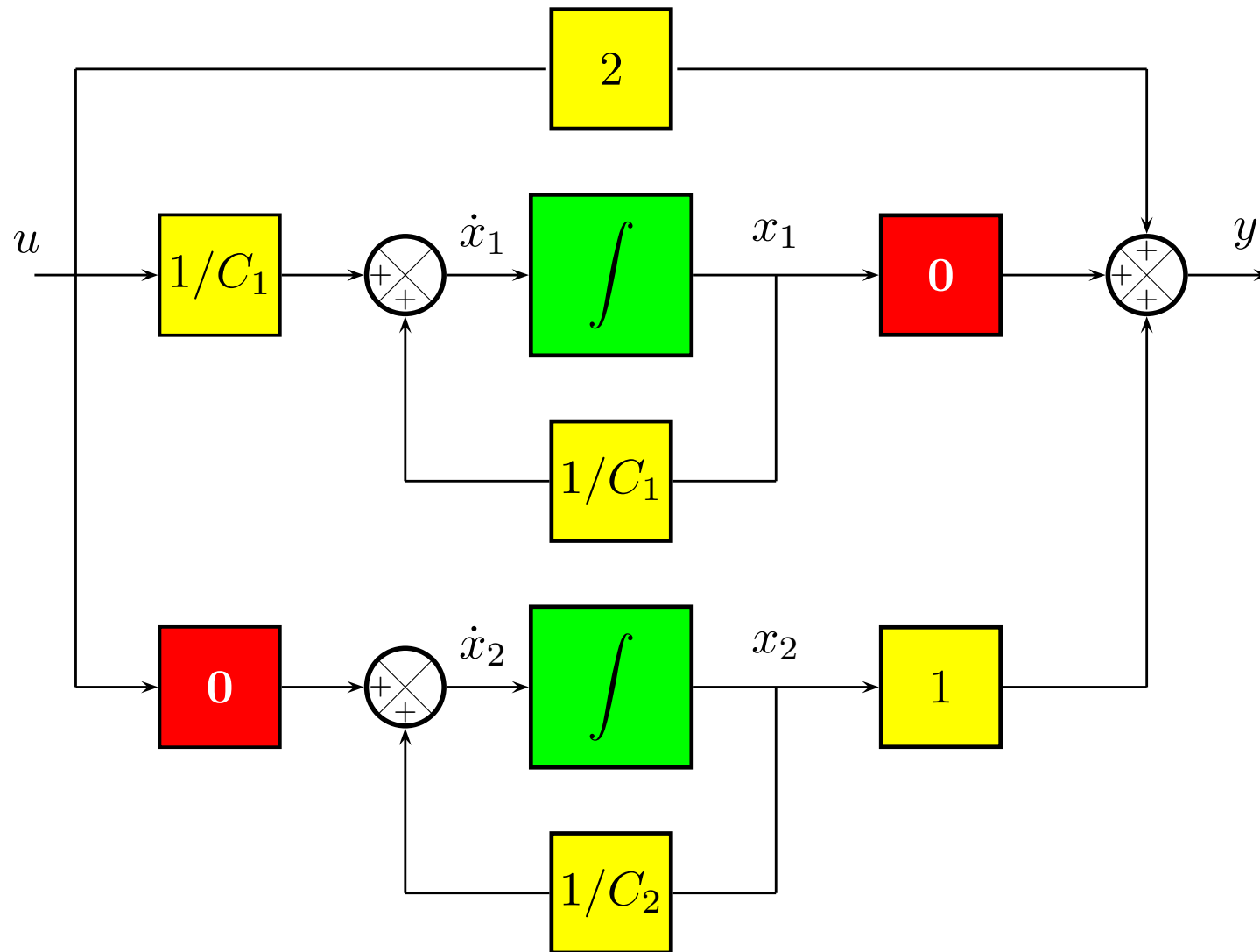


Figura 23: Diagrama de blocos do exemplo.

Diagrama geral

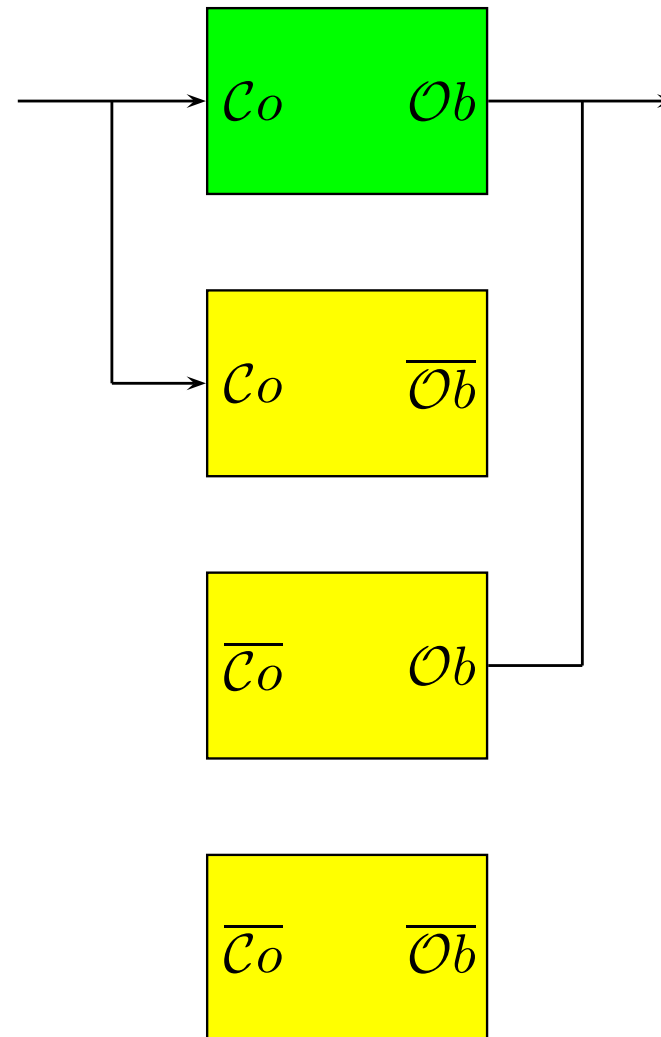
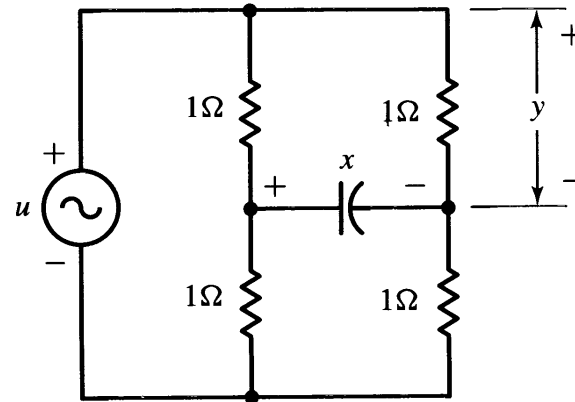


Figura 24: Decomposição canônica de Kalman.

Exemplo 17

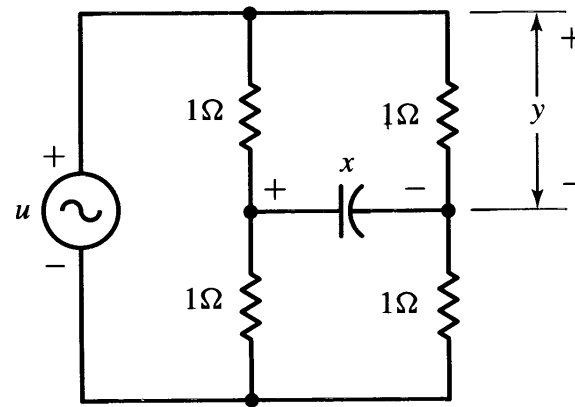


- ★ A corrente da fonte i não circula pelo capacitor.
A fonte enxerga somente 2 resistores de 2Ω em paralelo.

Portanto : $u = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} i \Rightarrow \boxed{i = u}$

Componente de corrente devido à tensão u :

$$\boxed{i_1 = \frac{1}{2} u}$$



- ★ A corrente do capacitor i_C não circula pela fonte.
 O capacitor enxerga somente 2 resistores de 2Ω em paralelo.

Portanto : $x = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} i_C \Rightarrow \boxed{i_C = x}$

Componente de corrente devido à tensão x :

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{2} x}$$

Corrente total : $i = i_1 + i_2 \Rightarrow$

$$i = \frac{1}{2}(u + x)$$

Tensão de saída : $y = Ri \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}(u + x)$$

Tensão no capacitor :

$$\dot{x} = \frac{1}{C} i_C \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{1}{C} x$$

Equação de estado para o circuito :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} u$$

Para este sistema : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = 0$



$$\text{rank}(\mathcal{C}) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{\mathcal{C}o}$$

$$.$$

Exemplo 18Seja o seguinte sistema **multivariável**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Verifique a controlabilidade desse sistema.

Neste caso, $n = 4$, portanto

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz $\mathcal{C}$ possui uma linha de zeros $\Rightarrow$

$$\text{rank}(\mathcal{C}) < 4$$

Conclusão:

o sistema é incontrolável.

Solução alternativa

Os autovalores da matriz A podem ser obtidos por inspeção:

$$\lambda_i = 1.$$

Então, podemos verificar a Co aplicando o critério

$$\boxed{(A, B) \text{ } Co} \Leftrightarrow \boxed{\text{rank} \left(\left[A - \lambda_i I \mid B \right] \right) = n}, \quad \forall \lambda_i(A).$$

Para o sistema dado,

$$\left[A - \lambda I \mid B \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Devido à linha de zeros $\Rightarrow$

$$\text{rank} \left(\left[A - \lambda I \mid B \right] \right) < 4$$

Conclusão:

o sistema é incontrolável.

Forma canônica $\mathcal{C}o$

★ Já vimos esta FC :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Propriedade.

Toda equação de estado na FC $\mathcal{C}_o$ é $\mathcal{C}_o$.

Verificação Para um SLIT de 3a. ordem :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Tem-se : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$

★ $\boxed{\forall a_i}$, $\boxed{\text{rank}(\mathcal{C}) = 3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}o}$.

Transformação de coordenadas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$z = Tx$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z \end{cases}$$

Matrizes do SLIT transformado :

$$\begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} \end{cases}$$

Teorema. A transformação de coordenadas não destrói a $\mathcal{C}o$.

$$\boxed{(A, B) \mathcal{C}o} \Leftrightarrow \boxed{(\tilde{A}, \tilde{B}) \mathcal{C}o}$$

Exercício. Provar.

Transformação para FC $\mathcal{C}_o$

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} TB & TA \underbrace{T^{-1}T}_I B & \dots & TA^{n-1} \underbrace{T^{-1}T}_I B \end{bmatrix} \\
 &= T \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
 &= T\mathcal{C}
 \end{aligned}$$

Portanto :

$$T = \tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}.$$

Exemplo 19

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

★ $\boxed{\text{rank}(\mathcal{C}) = 3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}o}.$

Pol. característico de A : $p(\lambda) = \det(sI - A)$

$$= (s - 1)^3$$
$$= s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

Portanto : $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tem-se : $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Portanto :

$$\begin{aligned} T = \tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificação :

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} = TAT^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Verificação :

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.3 Observabilidade (Ob)

- Introdução
- Definição de Ob
 - Exemplos: [1] [2] [3]
- Critérios de observabilidade
 - Definições: [*Matriz O*] [*Matriz W_o*] [*Matriz Gramiana*]
 - Teoremas: [*Observabilidade*] [*Dualidade*]
 - Exemplos: [4] [5] [6]
- Forma canônica Ob
 - Propriedade
 - Teorema
 - Transformação para FC Ob
- Forma canônica de Kalman

Introdução

$$\text{SLIT : } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

★ **Observabilidade** - Propriedade que diz quando o estado inicial $x(0)$ pode ser “reconstruído” a partir da saída $y(t)$.

★ É uma propriedade **dual** da controlabilidade.

(...)

Definição. (*Observabilidade*)

Um SLIT é dito observável se

$\exists t_1 > 0$ finito tal que

o conhecimento de $u(t)$ e $y(t)$ no intervalo $[0, t_1]$ é suficiente para se determinar unicamente a condição inicial

$$x_0 = x(0) .$$

★ Também se diz que o par (A, C) é *Ob*.

(...)

Definição alternativa :

Definição. Um SLIT é **observável** sse o estado inicial

$$\forall x_0 = x(0) \quad ,$$

pode ser unicamente determinado a partir de $y(t)$ no intervalo $[0, t_1]$

$$t_1 > 0 \text{ finito} \quad \text{com}$$

$$u(t) \equiv 0 \quad .$$

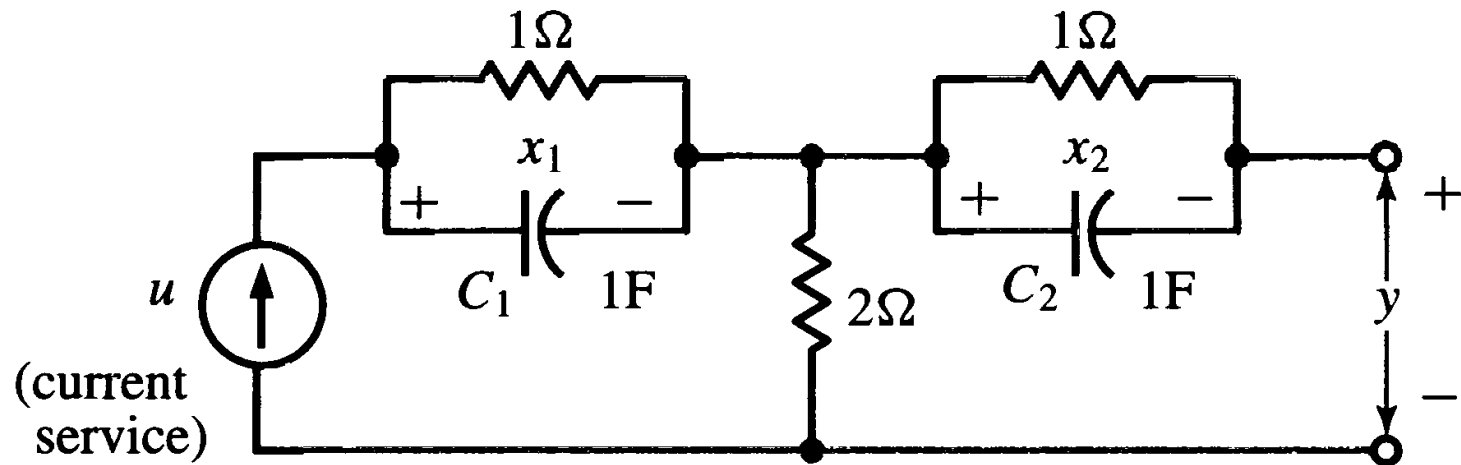
Pérolas

- Um sistema é dito observável quando a saída do sistema é condição suficiente para se prever a entrada do mesmo.
- Observabilidade é a capacidade de se observar na saída um componente do sistema.
- Um sistema é dito observável se sua saída estiver conectada.
- Aplicado um sinal nulo na entrada é possível saber o sinal na saída em estado zero.
- Na observabilidade mudamos o controle na entrada para o controle na saída.

Pérolas

- Pode ser definido como a característica de um sistema onde esta pode ser observada na saída do sistema.
- Observabilidade é quando a saída não depende da entrada $x(t)$.

Exemplo 20



u = corrente de entrada

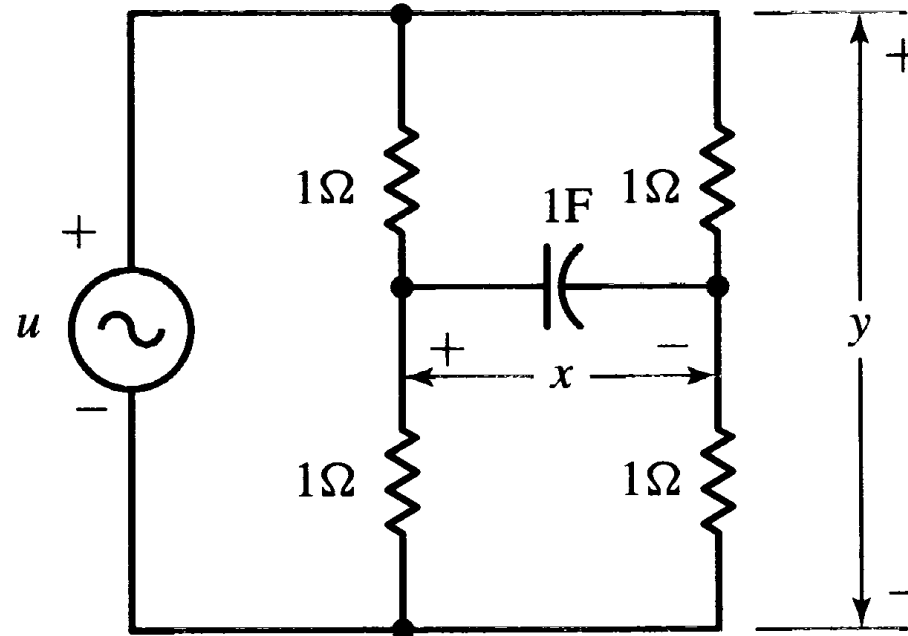
y = tensão de saída

x_1 = tensão no capacitor C_1

x_2 = tensão no capacitor C_2

★ Tensão x_1 não aparece na saída $\Rightarrow$ SLIT $\overline{Ob}$.

Exemplo 21



u = tensão de entrada

x = tensão no capacitor

y = tensão de saída

★ Neste caso,

$$\boxed{u \equiv 0} \Rightarrow \boxed{y(t) = 0}, \quad \forall t > 0.$$

★ O estado x é $\overline{\mathcal{O}b}$ $\Rightarrow$

$\boxed{\text{SLIT } \overline{\mathcal{O}b}}.$

Exemplo 22

(...)

Critérios para $\mathcal{O}b$

- ★ A aplicação da definição não é muito prática.
- ★ Vamos introduzir critérios algébricos.

Definição.*(Matriz de observabilidade)*

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



SISO :

$$\dim [\mathcal{O}] = n \times n$$



MIMO :

$$\dim [\mathcal{O}] = n \times np$$

Definição.

(Matriz $W_o(t)$)

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

Definição.

(Matriz Gramiana de observabilidade)

$$W_o := W_o(\infty) = \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$



$$\dim [W_o] = n \times n$$

Teorema. As seguintes sentenças são equivalentes :

(1) O par (A, C) é $\mathcal{O}b$.

(2) $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.

(3) A matriz $W_o(t)$ é não singular $\forall t > 0$.

(4) $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \right) = n$ para todo autovalor λ de A .

(5) $\text{Re}(\lambda(A)) < 0 \implies \begin{cases} \exists! W_o = W_o^T > 0 \quad (\text{matriz gramiana}) \\ \text{tal que} \quad A^T W_o + W_o A = -C^T C. \end{cases}$

Prova.

(...)

Fato. Se o par (A, C) é *Ob*,

então

$$x(0) = W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T Y(t) dt$$

onde

$$Y(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau .$$

Teorema. (*Dualidade*)

O par (A, B) é *Co* sse o par (A^T, B^T) é *Ob*.

Prova.

Exemplo 23

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Para este sistema :

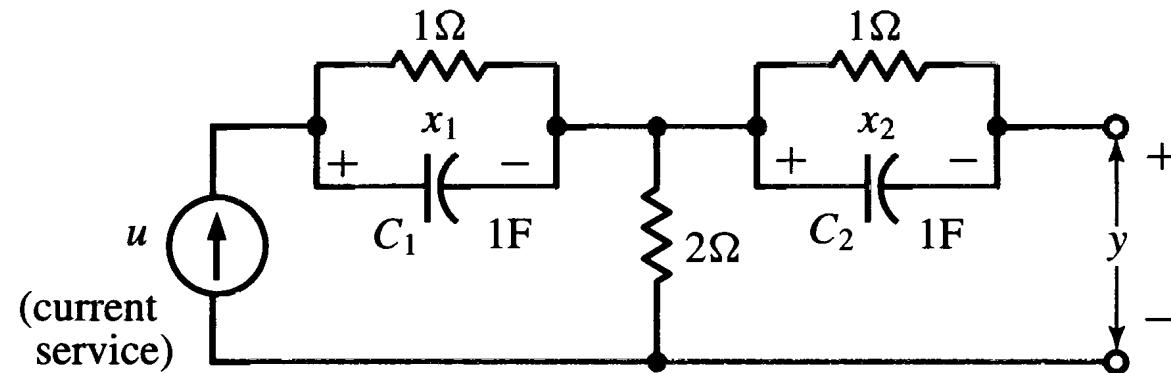
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 4$$

 $\Rightarrow$
 $\mathcal{O}b$
 $.$

Exemplo 24



$R_1 = 1\Omega$ (em paralelo com C_1)

$i_1, v_1 =$ corrente e tensão em R_1

$R_2 = 1\Omega$ (em paralelo com C_2)

$i_2, v_2 =$ corrente e tensão em R_2

Equação de estado para o circuito :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} u$$

Para este sistema :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix}$$



$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{\mathcal{O}b}.$$

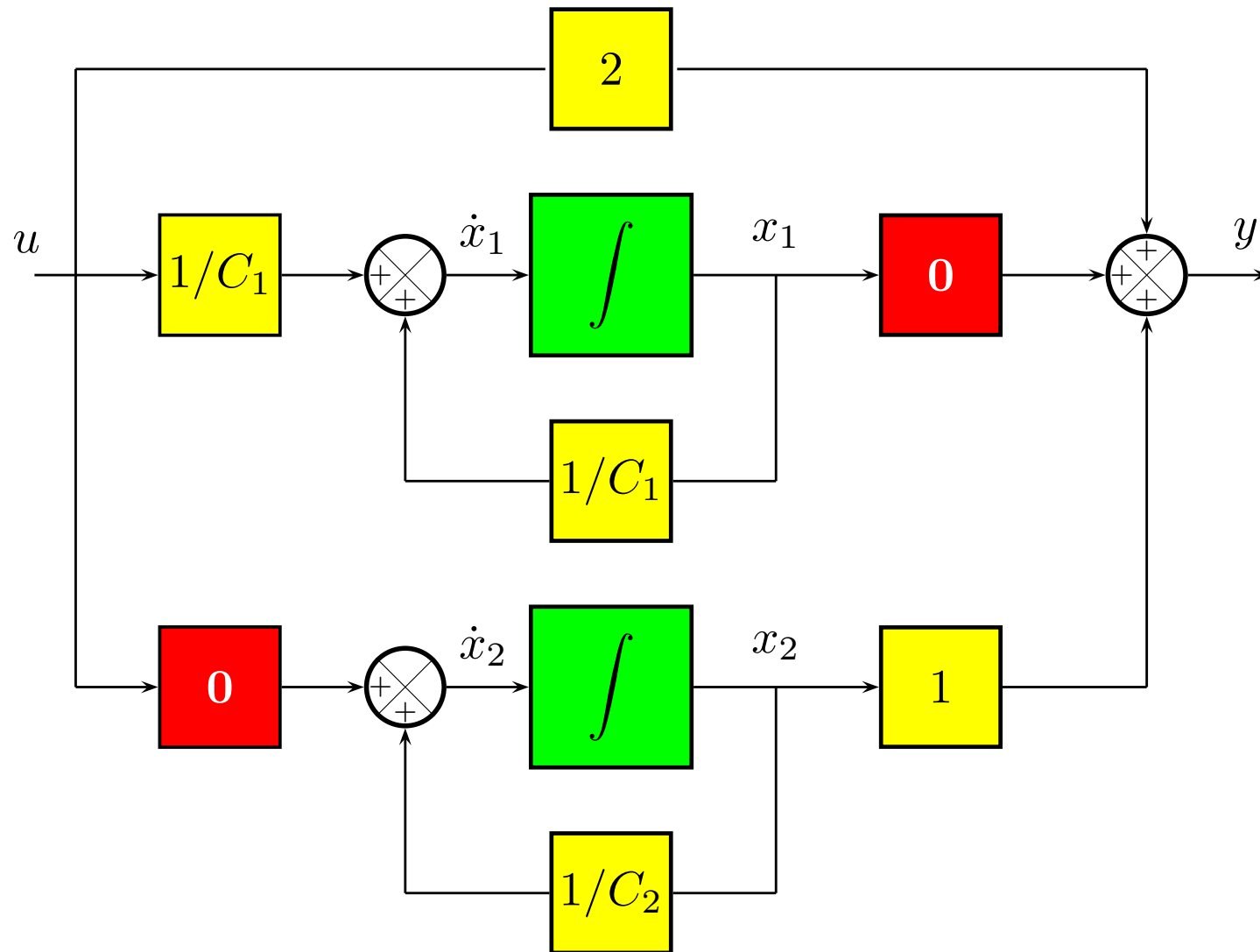


Figura 25: Diagrama de blocos do exemplo.

Diagrama geral

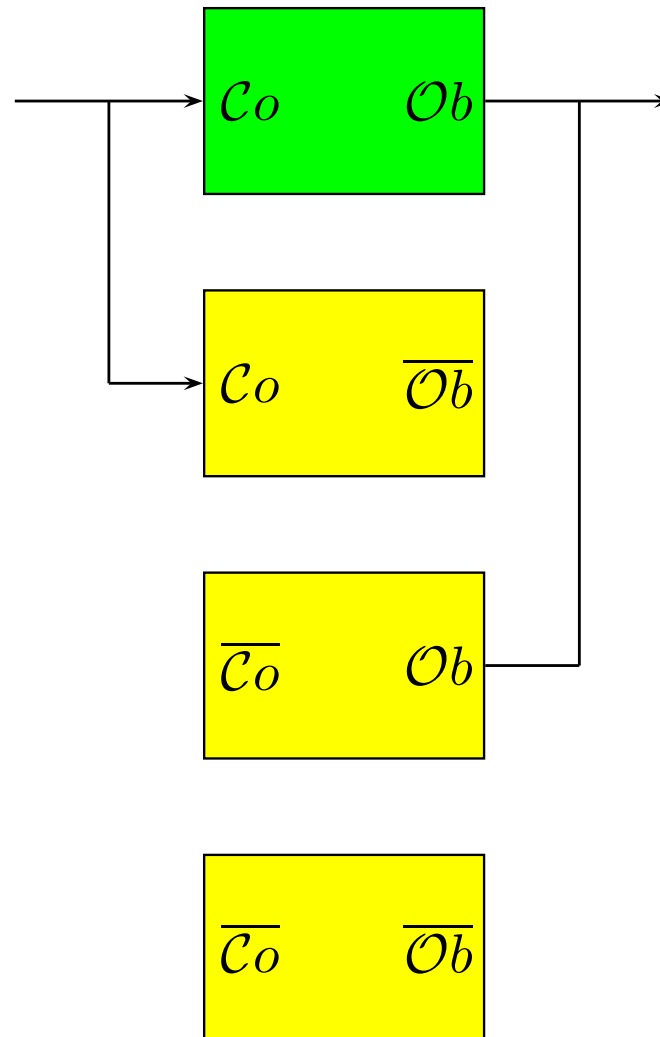


Figura 26: Decomposição canônica de Kalman.

Exemplo 25Seja o seguinte sistema **multivariável**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Verifique a observabilidade desse sistema.

Neste caso, $n = 4$, portanto

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

As 4 primeiras linhas de $\mathcal{O}$ são lin. independentes $\Rightarrow$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 4$$

Conclusão:

o sistema é observável.

Solução alternativa

Os autovalores da matriz A podem ser obtidos por inspeção:

$$\lambda_i = 1.$$

Então, podemos verificar a $\mathcal{O}b$ aplicando o critério

$$\boxed{(A, C) \mathcal{O}b} \Leftrightarrow \boxed{\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{bmatrix} \right) = n} , \quad \forall \lambda_i(A).$$

Para o sistema dado,

$$\left[\begin{array}{c} A - \lambda I \\ C \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

As 4 1as. colunas são lin. independentes $\Rightarrow$

$$\text{rank} \left(\left[\begin{array}{c} A - \lambda I \\ C \end{array} \right] \right) = 4$$

Conclusão:

o sistema é observável.

Forma canônica *Ob*

★ Já vimos esta FC :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x$$

Propriedade.

Toda equação de estado na FC $\mathcal{O}b$ é $\mathcal{O}b$.

Verificação Para um SLIT de 3a. ordem :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Tem-se : $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 - a_1 & -a_2 & 1 \end{bmatrix}$


 $\forall a_i$

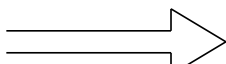
,

 $\text{rank}(\mathcal{O}) = 3$
 $\Rightarrow$
 $\mathcal{O}b$

.

Transformação de coordenadas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$z = Tx$$


$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z \end{cases}$$

Matrizes do SLIT transformado :

$$\begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} \end{cases}$$

Teorema. A transformação de coordenadas não destrói a $\mathcal{O}b$.

$$\boxed{(A, C) \mathcal{O}b} \Leftrightarrow \boxed{(\tilde{A}, \tilde{C}) \mathcal{O}b}$$

Exercício. Provar.

Transformação para FC $\mathcal{O}b$

A matriz de observabilidade do sistema transformado é :

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{A}\tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{A}^{n-1}\tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT^{-1} \\ CT^{-1}TAT^{-1} \\ \vdots \\ CT^{-1}TA^{n-1}T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} = \mathcal{O}T^{-1}$$

Portanto :

$$T = \tilde{\mathcal{O}}^{-1} \mathcal{O} .$$

Exemplo 26

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se : $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

★ $\boxed{\text{rank}(\mathcal{O}) = 3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{O}b}.$

Pol. característico de A : $p(\lambda) = \det(sI - A)$

$$= (s - 1)^3$$
$$= s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

Portanto : $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tem-se : $\tilde{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto :

$$\begin{aligned} T = \tilde{\mathcal{O}}^{-1} \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificação :

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} = TAT^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Verificação :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma canônica de Kalman

Seja o SLIT :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Hipótese :

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \leq n_1 < n$$



Note que

$$n_1 < n$$



O SLIT é **incontrolável** !

A partir de $\mathcal{C}$ montamos a matriz

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_{n_1} & q_{n_1+1} & \cdots & q_n \end{array} \right]$$

onde

- $q_1, q_2, \dots, q_{n_1}$ são quaisquer n_1 **colunas *l.i.* de $\mathcal{C}$** .
- $q_{n_1+1}, \dots, q_n$ são colunas arbitrárias escolhidas tal que P^{-1} seja não singular.

Fato. Utilizando a transformação de coordenadas

$$\tilde{x} = Px$$

o SLIT é transformado para a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_C \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_C & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_C \\ \tilde{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_C & \tilde{C}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_C \\ \tilde{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + Du$$

onde

$\tilde{x}_C$ é o estado do subsistema controlável

$\tilde{x}_{\bar{C}}$ é o estado do subsistema incontrolável

★ Note que

$$\begin{aligned}g(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}\end{aligned}$$

★ O modelo do **subsistema controlável** é dado por :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_C &= \tilde{A}_C \tilde{x}_C + \tilde{B}_C u \\ y &= \tilde{C}_C \tilde{x}_C + Du\end{aligned}$$

Prova.

(...)

Exemplo 27

(...)

Idem para um SLIT inobservável.

(...)

7.4 Scripts do MATLAB

oscilador.m

```
function dx=oscilador(t,x)
global A;
%----- Oscilador harmônico
dx = A*x;
```

fig1.m

```
global A;
tf = 10;
%----- Initial conditions ---
x0 = [1 0]; init = [x0];
%----- Parameters ---
a = 1; b = -2; A = [a b ; -b -a];
%----- Simulation ---
options = odeset('OutputFcn','odeplot','MaxStep',0.01);
[t,x] = ode45('oscilador',[0 tf],init,options);
%--- Identification of variables ---
x1 = x(:,1); x2 = x(:,2);
%----- Plotting commands ---
plot(x1,x2);grid;shg; hold comet(x1,x2);
print -depsc fig1
```

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 8

8 Solução numérica de EDOs

Conteúdo

1. Introdução
2. Métodos de Taylor
3. Métodos de Runge-Kutta
4. Métodos multipasso
5. Exercícios

8.1 Introdução

Problema Resolver numericamente a EDO

$$\dot{y} = f(t, y)$$

com **condição inicial** $y(0)$.

8.2 Métodos de Taylor

- Série de Taylor
 - Teorema. *Expansão em série de Taylor*
- Método de Euler
 - Interpretação geométrica
 - Erro de aproximação
 - Exemplos: [1] [2]
- Método de Euler-Cauchy
 - Interpretação geométrica
 - Erro de aproximação
 - Exemplos: [3]

Série de Taylor

- ★ Esta classe de métodos é derivada a partir do truncamento da expansão em série de Taylor da função $f(\cdot)$.

(...)

Teorema. *(Expansão em série de Taylor)*

Seja $f(x)$ uma função continuamente diferenciável em x no intervalo $(x - r, x + r)$, então :

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$f(x + h) = f(x) + h \frac{d}{dx} f(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \dots$$

Método de Euler

★ É o método mais simples de solução.

Idéia. $f(\cdot)$ é constante durante o intervalo de integração h .

Expansão em **série de Taylor** :

$$y(t + h) = y(t) + h\dot{y}(t) + \mathcal{O}(h^2)$$

O **método de Euler** emprega somente os 2 primeiros termos da expansão.

Notação :

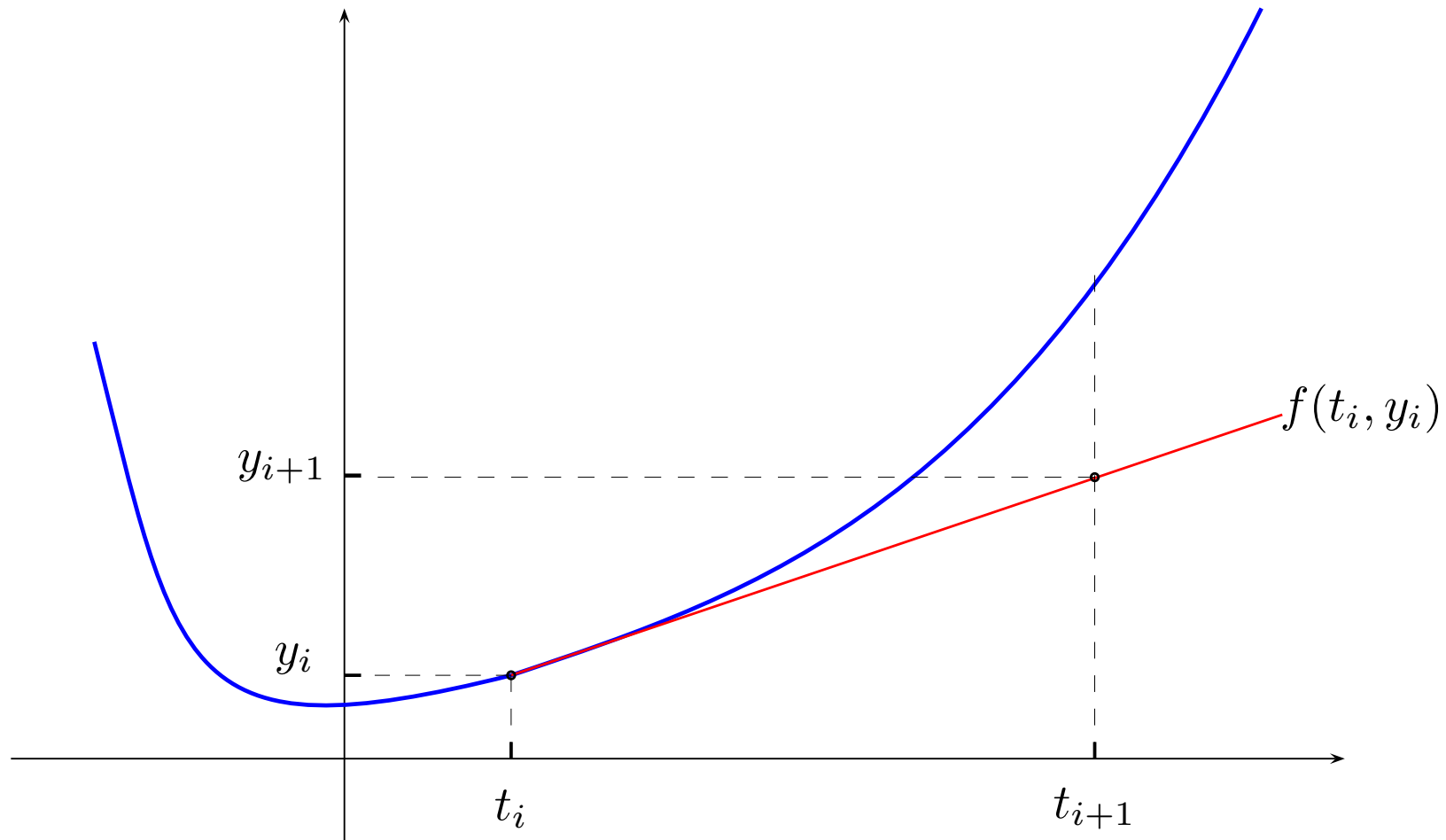
$$\underbrace{y(t + h)}_{y_{i+1}} = \underbrace{y(t)}_{y_i} + h \underbrace{\dot{y}(t)}_{f(t_i, y_i)}$$

Aproximação de Euler :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Fórmula de
recorrência

Interpretação. $f(\cdot)$ é constante durante o intervalo h .



Erro de aproximação.

$$\mathcal{O}(h^2)$$

Verificação.

(...)

Exemplo 1 Resolver numericamente a equação

$$\dot{y} = y + t$$

Condição inicial : $y(0) = 2$

Intervalo de integração : $h = 0.5$

Intervalo de solução : $[0, 1]$

Método : **Euler**.

Solução analítica :

$$y = 3e^t - t - 1$$

Solução

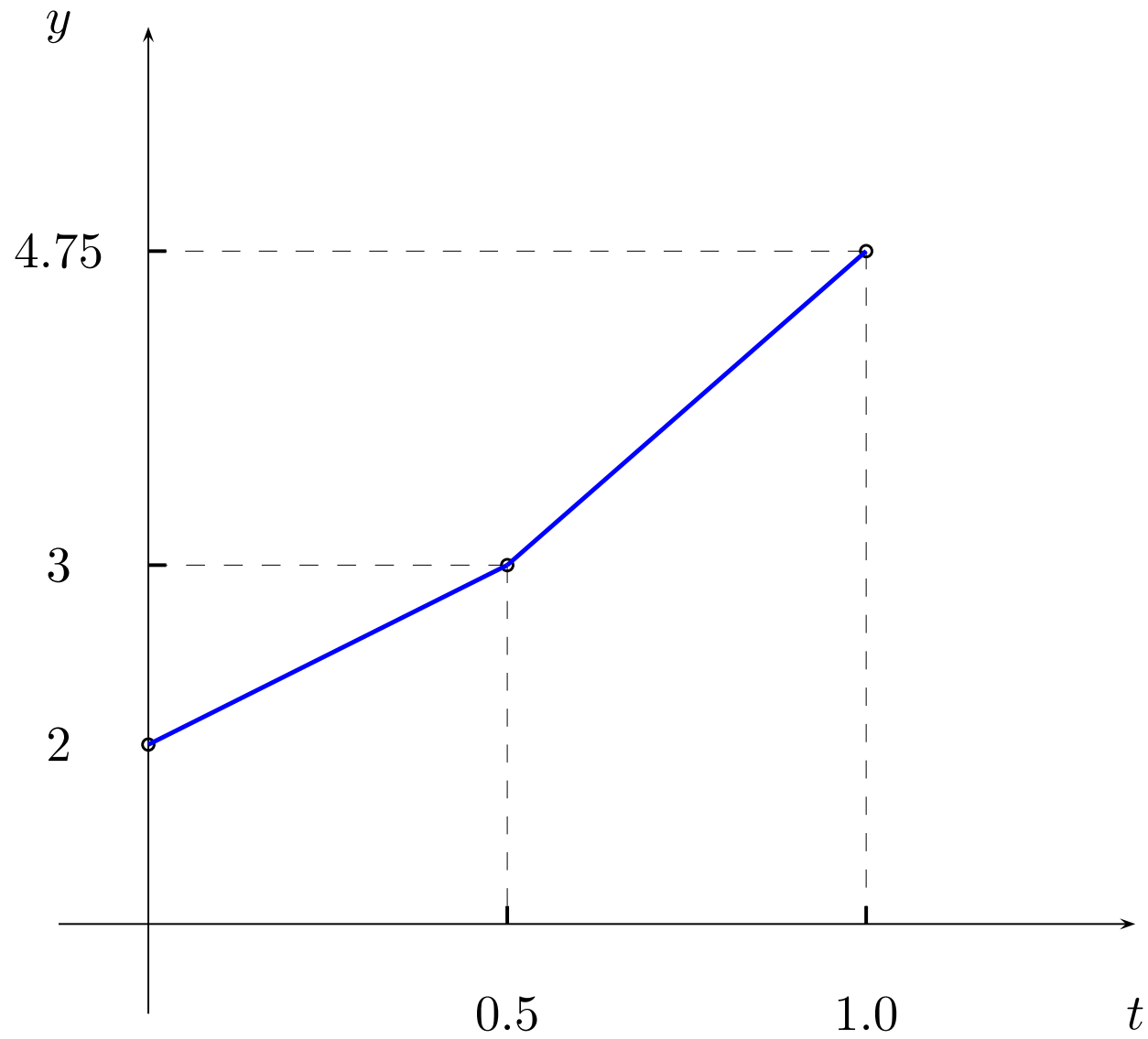
Aproximação de Euler :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Iterações :

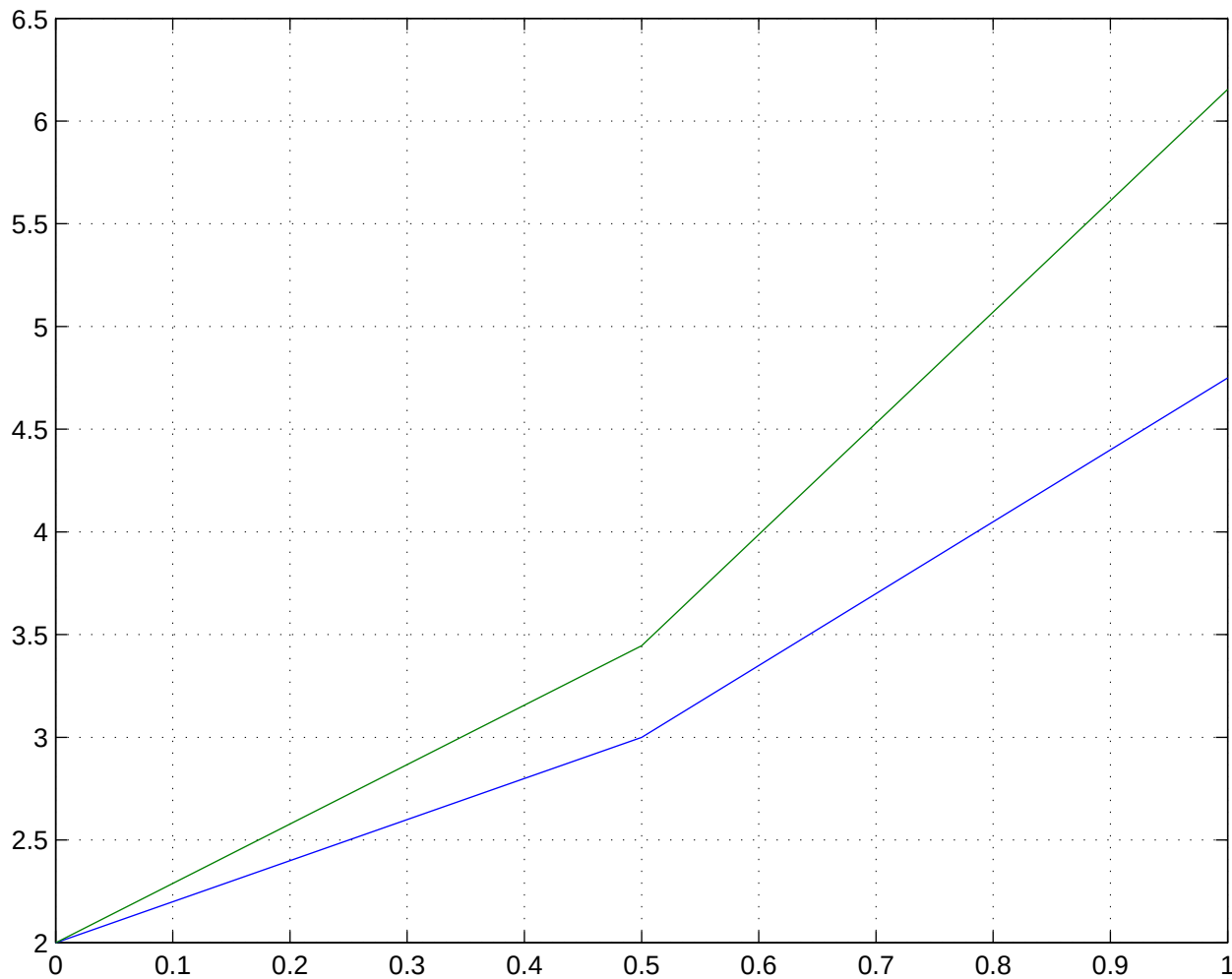
$$\begin{aligned} i = 0, \quad t_1 = 0.5 & : \quad y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \\ & = 2 + 0.5(2 + 0) \\ & = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = 1, \quad t_2 = 1.0 & : \quad y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) \\ & = 3 + 0.5(3 + 0.5) \\ & = 4.75 \end{aligned}$$



Solução usando Matlab :

		Euler	Exata
i	t	y	y
-	0	2	2
0	0.5	3	3.4462
1	1.0	4.75	6.1548



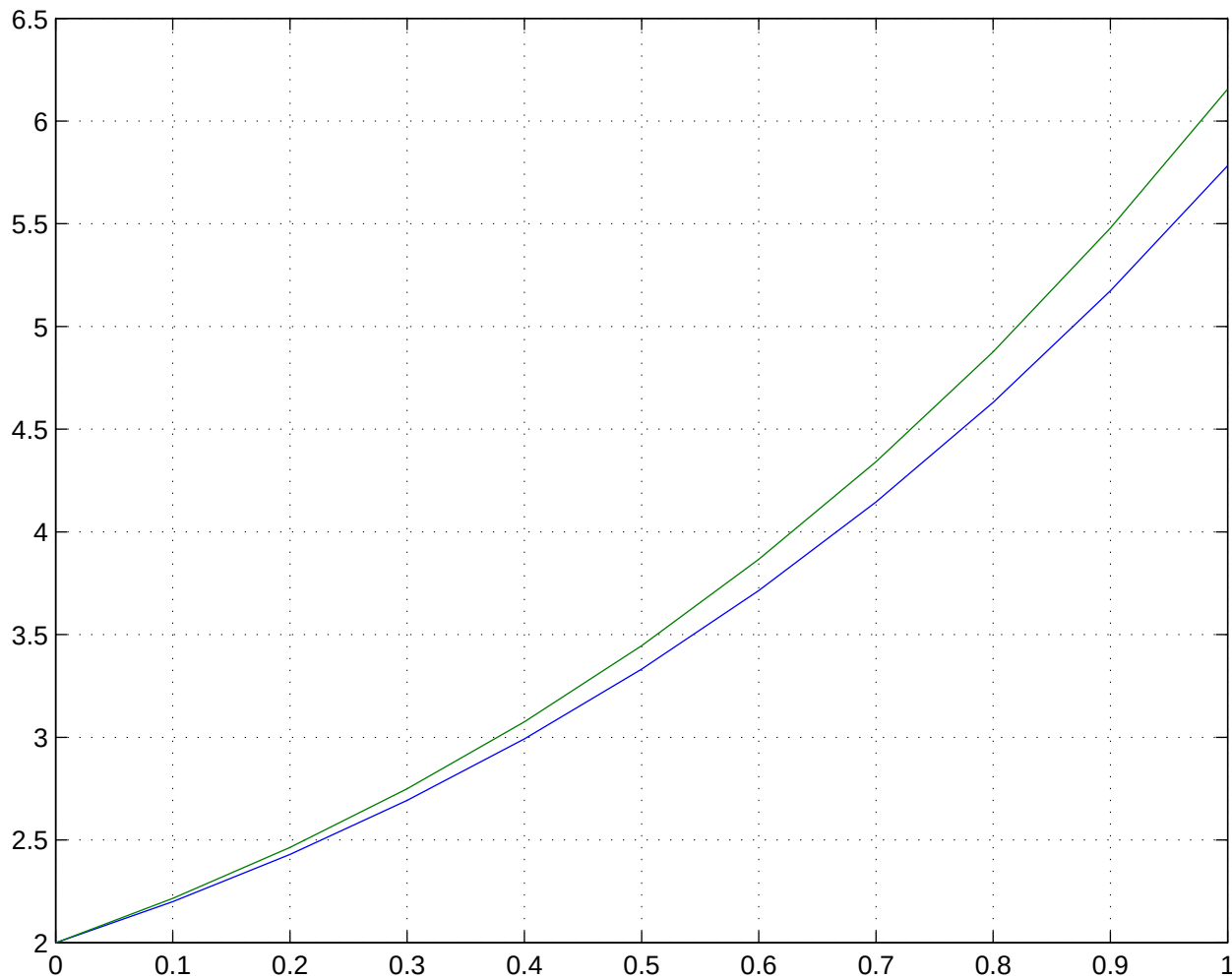
$(h = 0.5)$

Legenda :

Exata

Euler

Figura 27: Solução usando Matlab. Script `exemplo1a.m`.



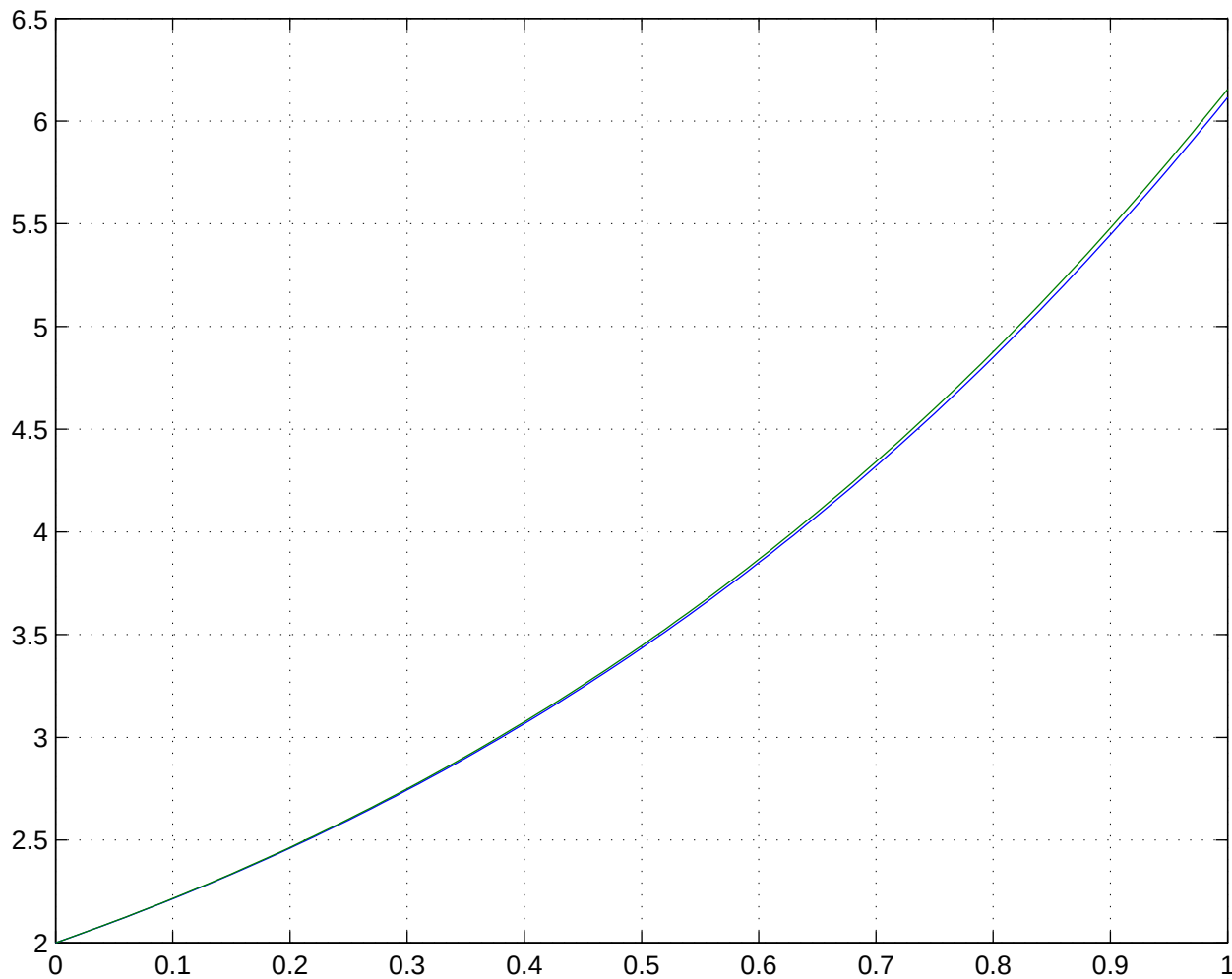
$(h = 0.1)$

Legenda :

Exata

Euler

Figura 28: Solução usando Matlab. Script `exemplo1b.m`.



$(h = 0.01)$

Legenda :

Exata

Euler

Figura 29: Solução usando Matlab. Script `exemplo1c.m`.

Exemplo 2 Resolver numericamente a equação de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y - cy^3 \end{cases}$$

Contante : $c = 1$

Condição inicial : $x(0) = 1$
 $y(0) = 1$

Intervalo de integração : $h = 0.5$

Intervalo de solução : $[0, 1]$

Método : Euler.

★ Esse sistema não possui solução analítica.

Solução

Usando notação vetorial :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{bmatrix} = f(t, z)$$

Aproximação de Euler :

$$z_{i+1} = z_i + hf(t_i, z_i)$$

Iterações :

$$t_0 = 0 : z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} i = 0, \quad t_1 = 0.5 : z_1 &= z_0 + hf(t_0, z_0) \\ &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} y_0 \\ -x_0 + y_0 - y_0^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 1 - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iterações :

$$i = 1, \quad t_2 = 1.0 \quad : \quad z_2 = z_1 + hf(t_1, z_1)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} y_1 \\ -x_1 + y_1 - y_1^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 + 0.5 - 0.5^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.0625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resumo :

		Euler		"Exata"	
i	t	x	y	x	y
-	0	1	1	1	1
0	0.5	1.5	0.5	1.3836	0.5321
1	1.0	1.75	-0.0625	1.5046	-0.1006

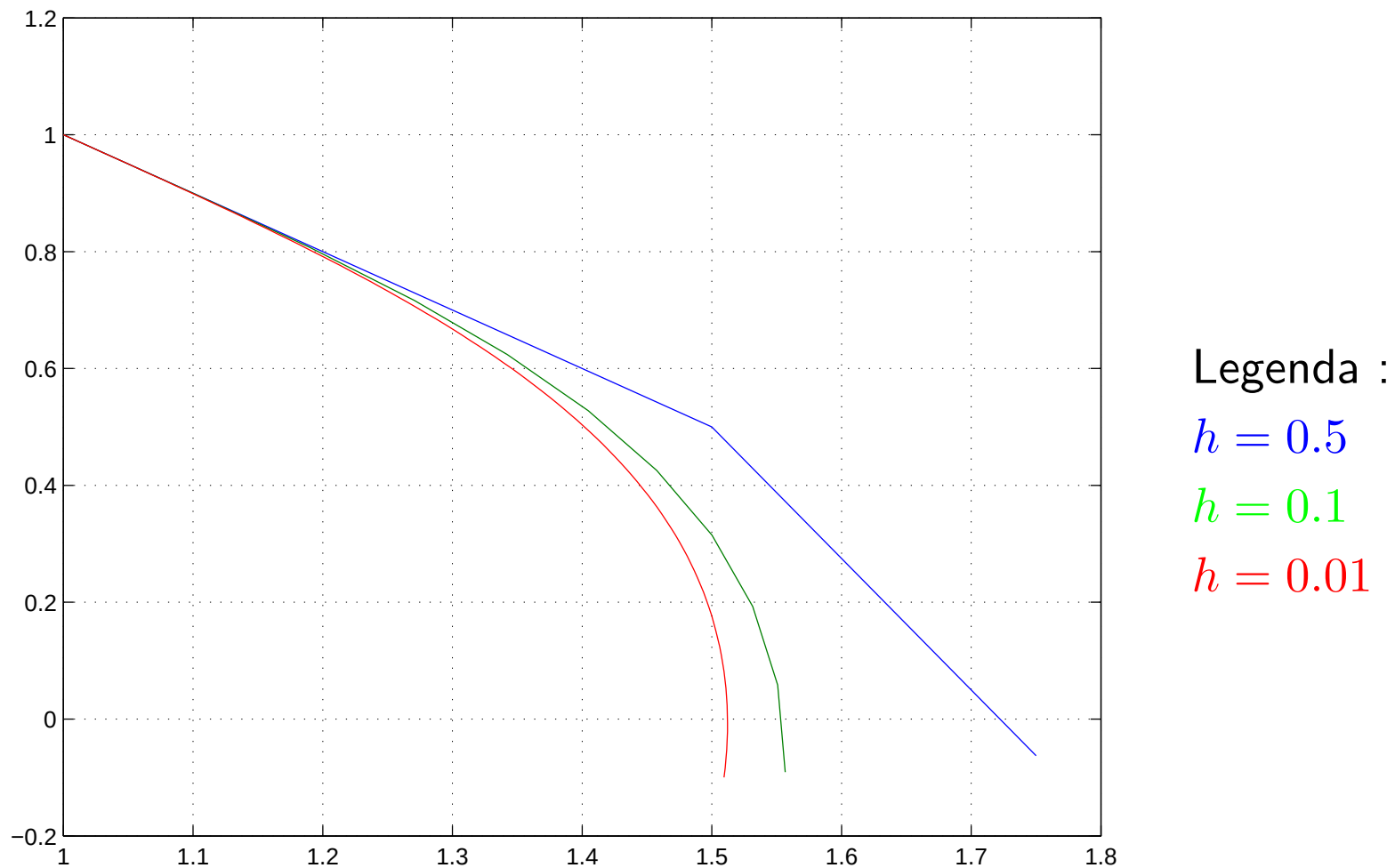
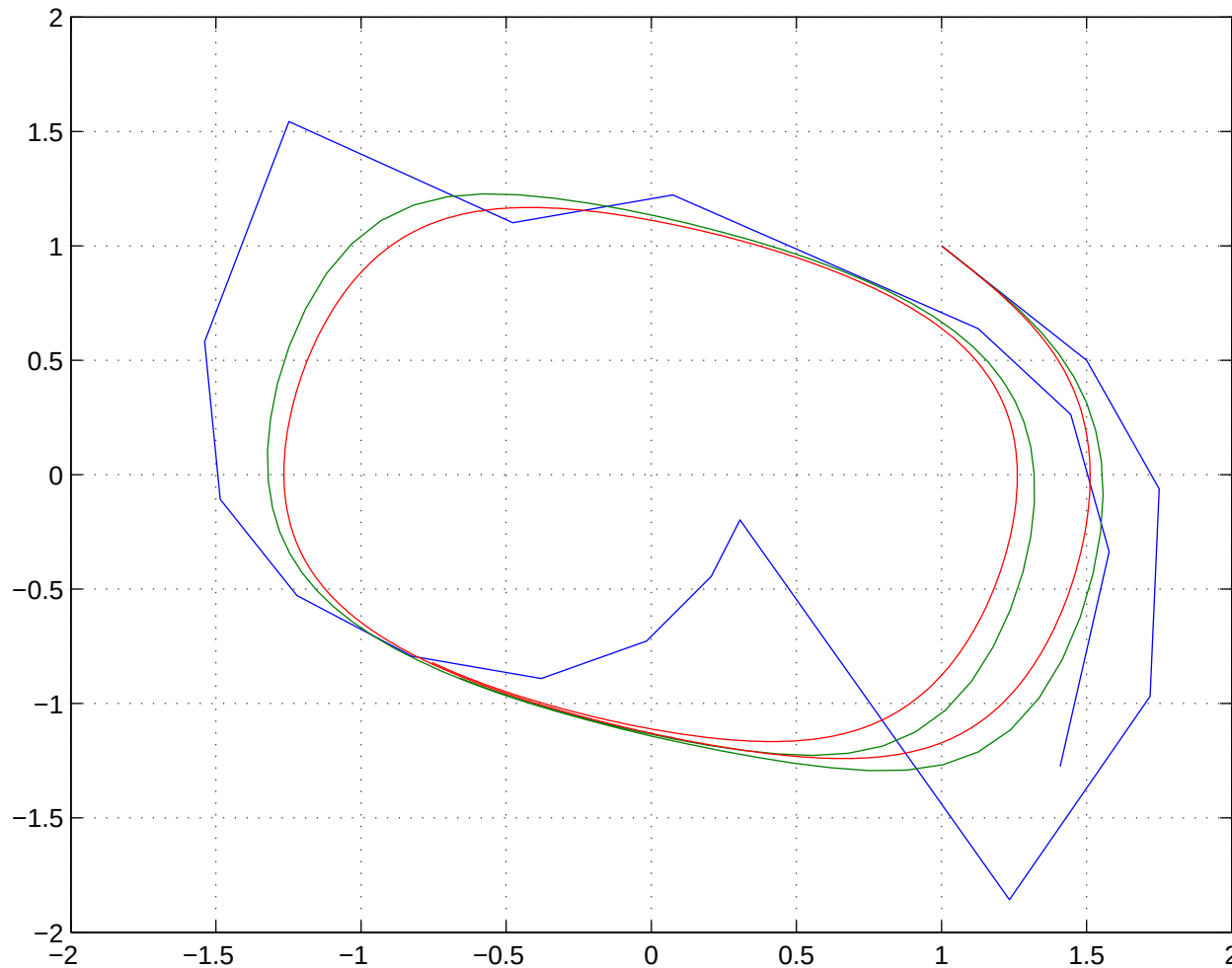


Figura 30: Solução usando Matlab. Script `exemplo2a.m`.

Solução no intervalo $[0, 10]$.



Legenda :

$h = 0.5$

$h = 0.1$

$h = 0.01$

Figura 31: Solução usando Matlab. Script `exemplo2b.m`.

Método de Euler-Cauchy

$$\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & (\text{Atualização usando Euler}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1})] \end{cases}$$

★ $\hat{y}_{i+1}$ é uma primeira estimativa de y_{i+1} usando Euler.

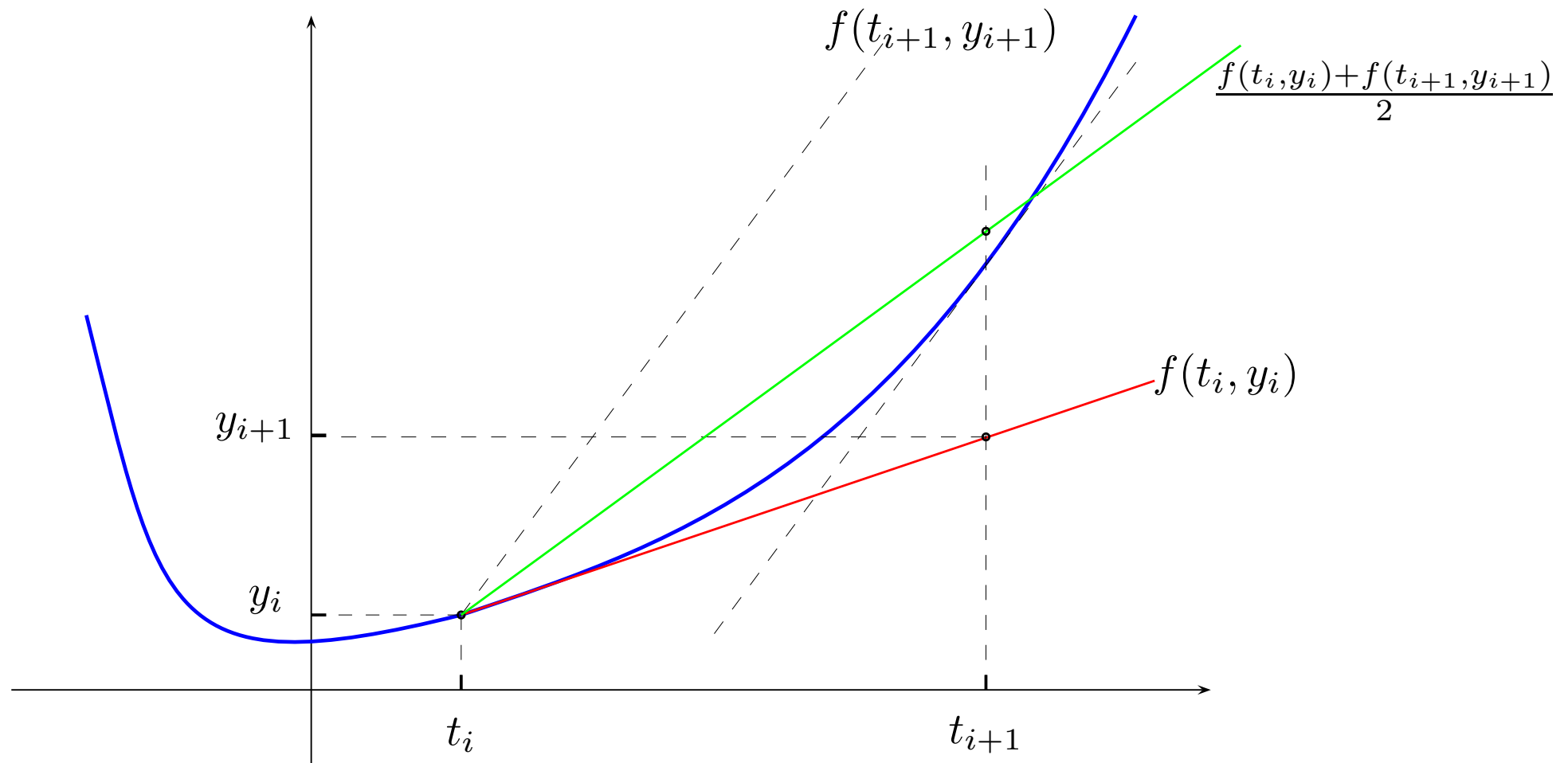
Interpretação

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[\underbrace{f(t_i, y_i)}_{\dot{y}_i} + \underbrace{f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1})}_{\dot{\hat{y}}_{i+1}} \right]$$

Portanto :

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\frac{\dot{y}_i + \dot{\hat{y}}_{i+1}}{2} \right]$$

★ $\left[\frac{\dot{y}_i + \dot{\hat{y}}_{i+1}}{2} \right]$: Estimativa da velocidade média .

Interpretação geométrica.

Erro de aproximação.

$$\mathcal{O}(h^3)$$

Verificação.

(...)

Exemplo 3 Resolver numericamente a equação

$$\dot{y} = y + t$$

Condição inicial : $y(0) = 2$

Intervalo de integração : $h = 0.5$

Intervalo de solução : $[0, 1]$

Método : Euler-Cauchy .

Solução analítica :

$$y = 3e^t - t - 1$$

Solução

Euler-Cauchy :

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \right]$$

Iterações :

$$i = 0$$

,

$$t_1 = 0.5$$

$$: \quad \hat{y}_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

$$= 2 + 0.5(2 + 0)$$

$$= 3$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left[f(t_0, y_0) + f(t_1, \hat{y}_1) \right]$$

$$= 2 + 0.25 \left[(2 + 0) + (3 + 0.5) \right]$$

$$= 3.375$$

Iterações :

$$i = 1$$

,

$$t_2 = 1.0$$

$$: \quad \hat{y}_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

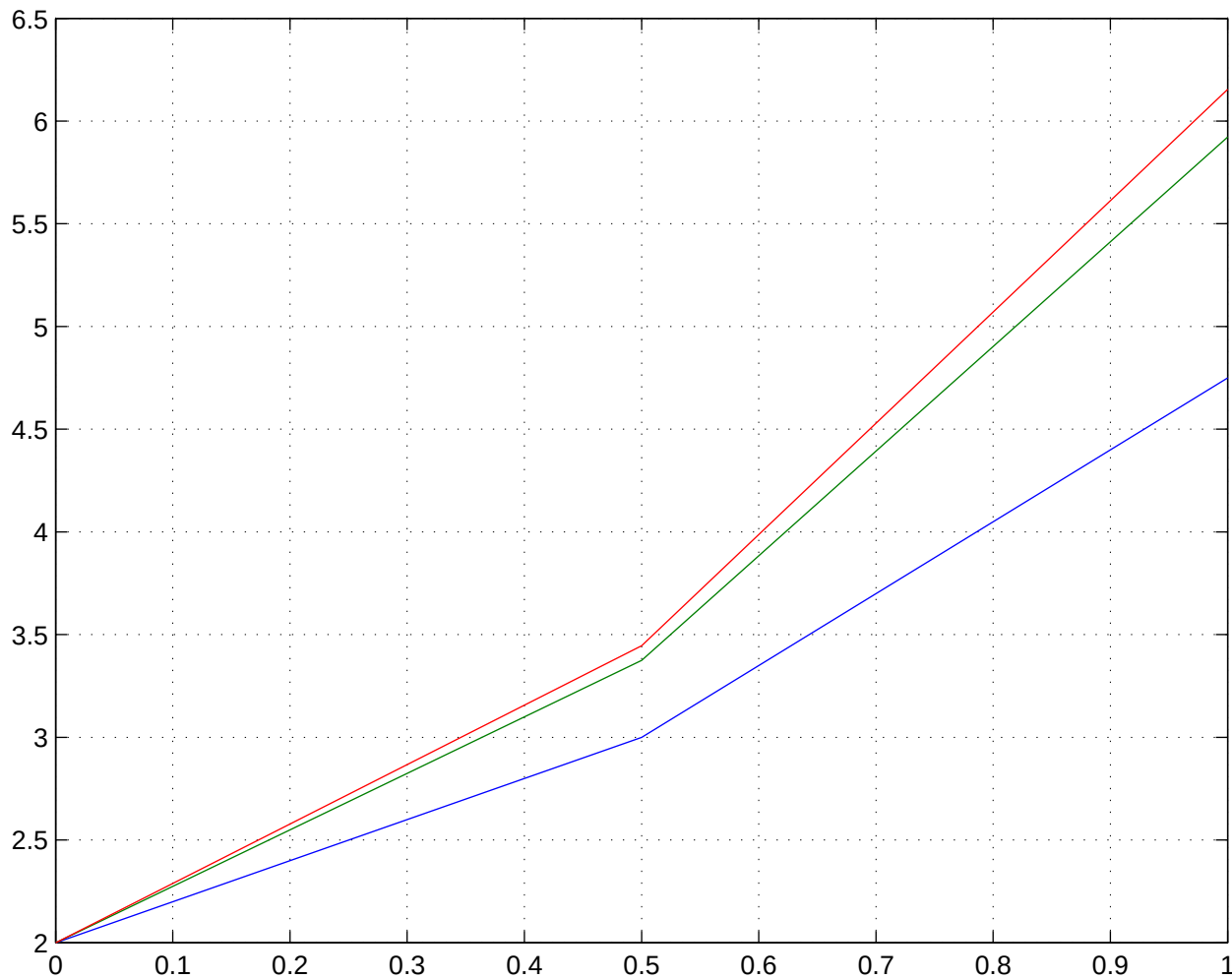
$$= 3.375 + 0.5(3.375 + 0.5)$$

$$= 5.3125$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} \left[f(t_1, y_1) + f(t_2, \hat{y}_2) \right] \\ &= 3.375 + 0.25 \left[(3.375 + 0.5) + (5.3125 + 1.0) \right] \\ &= 5.9219 \end{aligned}$$

Resumo :

		Euler	Cauchy	Exata
i	t	y	y	y
-	0	2	2	2
0	0.5	3	3.375	3.4462
1	1.0	4.75	5.9219	6.1548



$(h = 0.5)$

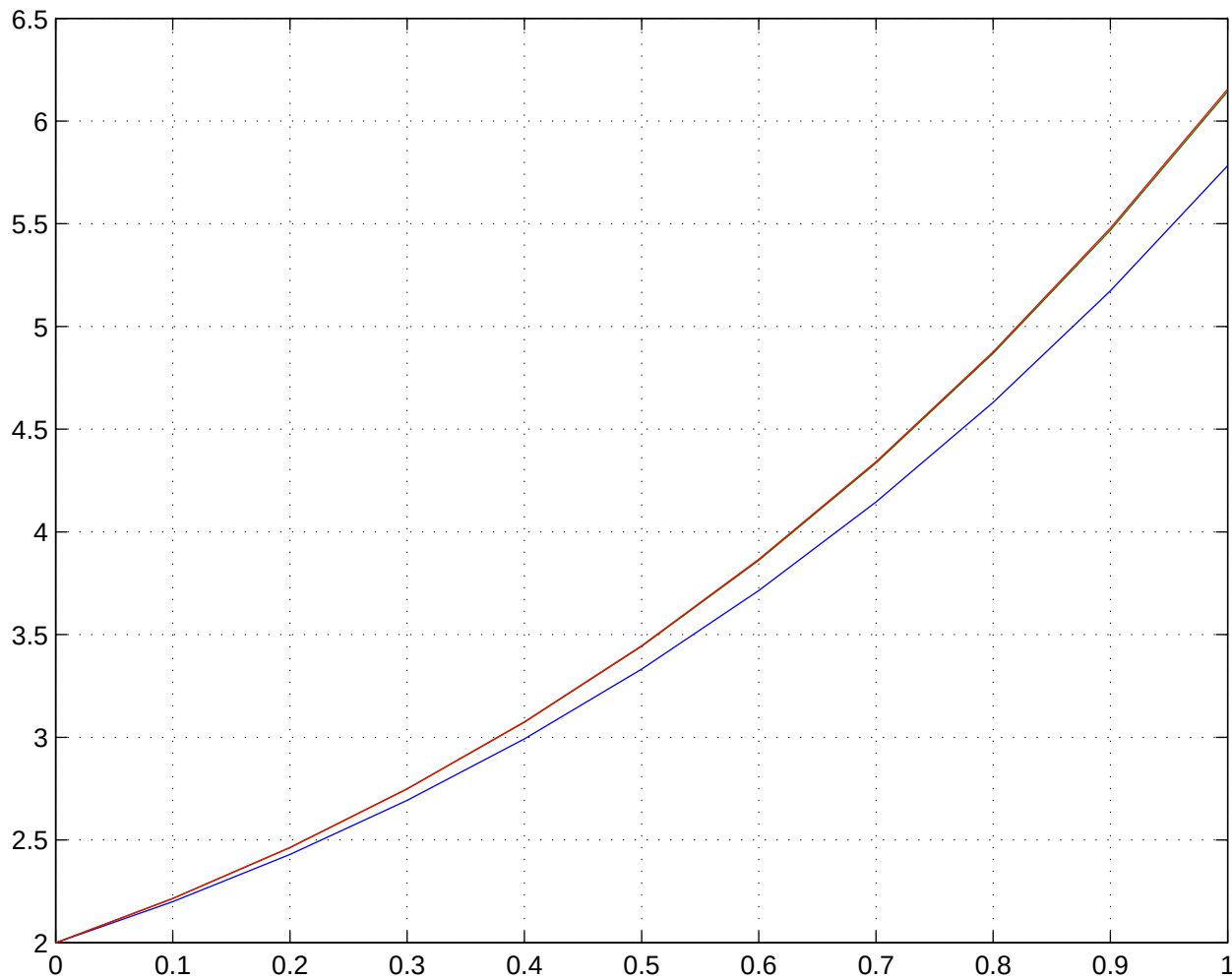
Legenda :

Exata

Euler-Cauchy

Euler

Figura 32: Solução usando Matlab. Script `exemplo3a.m`.



$(h = 0.1)$

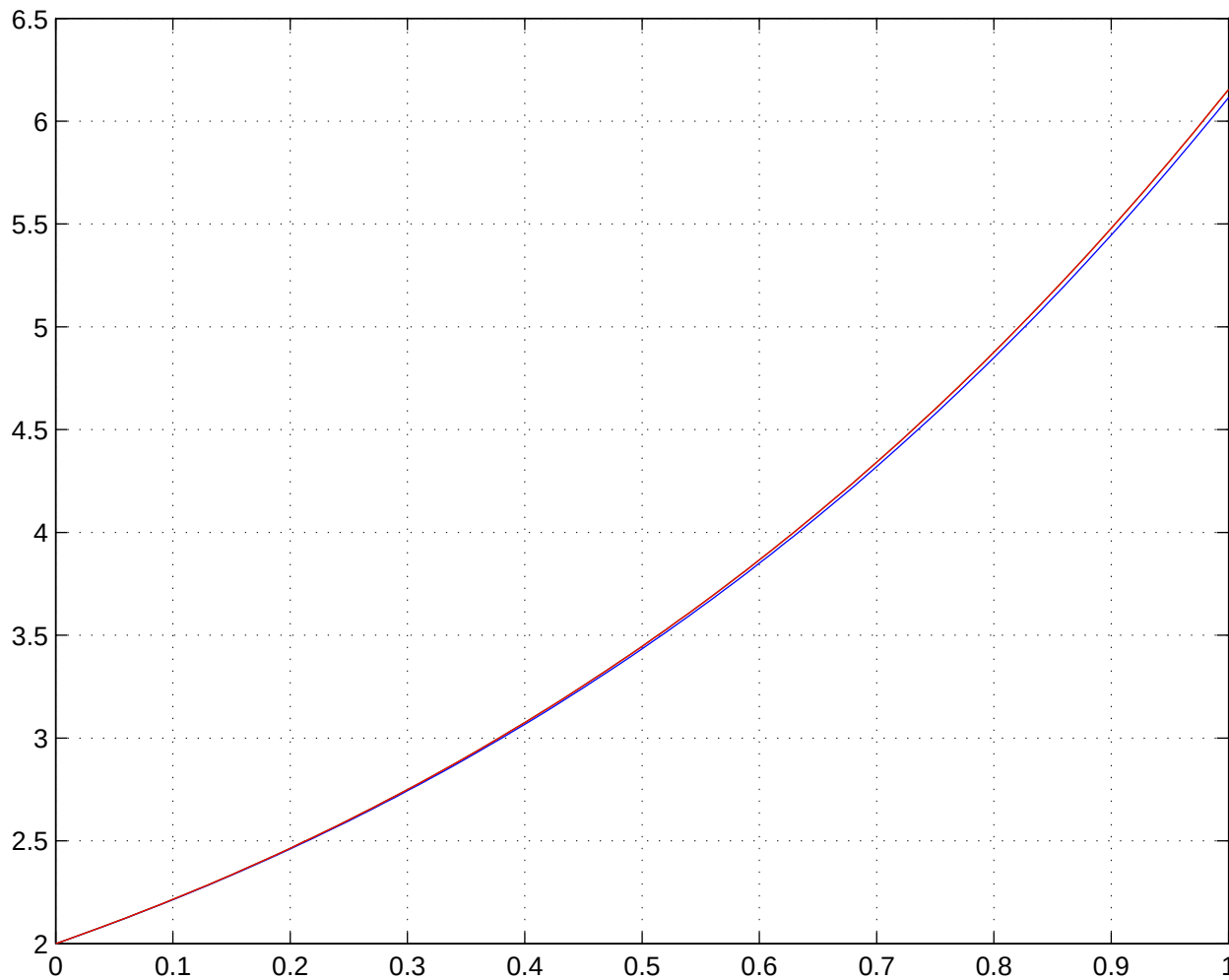
Legenda :

Exata

Euler-Cauchy

Euler

Figura 33: Solução usando Matlab. Script `exemplo3b.m`.



$(h = 0.01)$

Legenda :

Exata

Euler-Cauchy

Euler

Figura 34: Solução usando Matlab. Script `exemplo3c.m`.

8.3 Métodos de Runge-Kutta

- Introdução
- Método Mid-point
 - Interpretação geométrica
 - Exemplos: [1]
- Método de Runge-Kutta de 2a. ordem
- Método de Runge-Kutta clássico
 - Exemplos: [2] [3]

Introdução

(...)

Método Mid-point

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_1 = hf(t_i, y_i) & (A) \\ k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) & (B) \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{array} \right.$$

Nota. (A) : Incremento de y calculado por Euler.

(B) : Incremento de y calculado com f no ponto intermediário.

Interpretação geométrica.



Exemplo 4 Resolver numericamente a equação

$$\dot{y} = y + t$$

Condição inicial : $y(0) = 2$

Intervalo de integração : $h = 0.5$

Intervalo de solução : $[0, 1]$

Método : Método Mid-point .

Solução analítica :

$$y = 3e^t - t - 1$$

Solução

Mid-point :

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2$$

Iterações :

$$\begin{aligned} i = 0, \quad t_1 = 0.5 \quad : \quad k_1 &= hf(t_0, y_0) \\ &= 0.5(2 + 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(t_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_1) \\ &= 0.5(2 + 0.5 + 0 + 0.25) \\ &= 1.3750 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + k_2 \\ &= 2 + 1.3750 \\ &= 3.3750 \end{aligned}$$

Iterações :

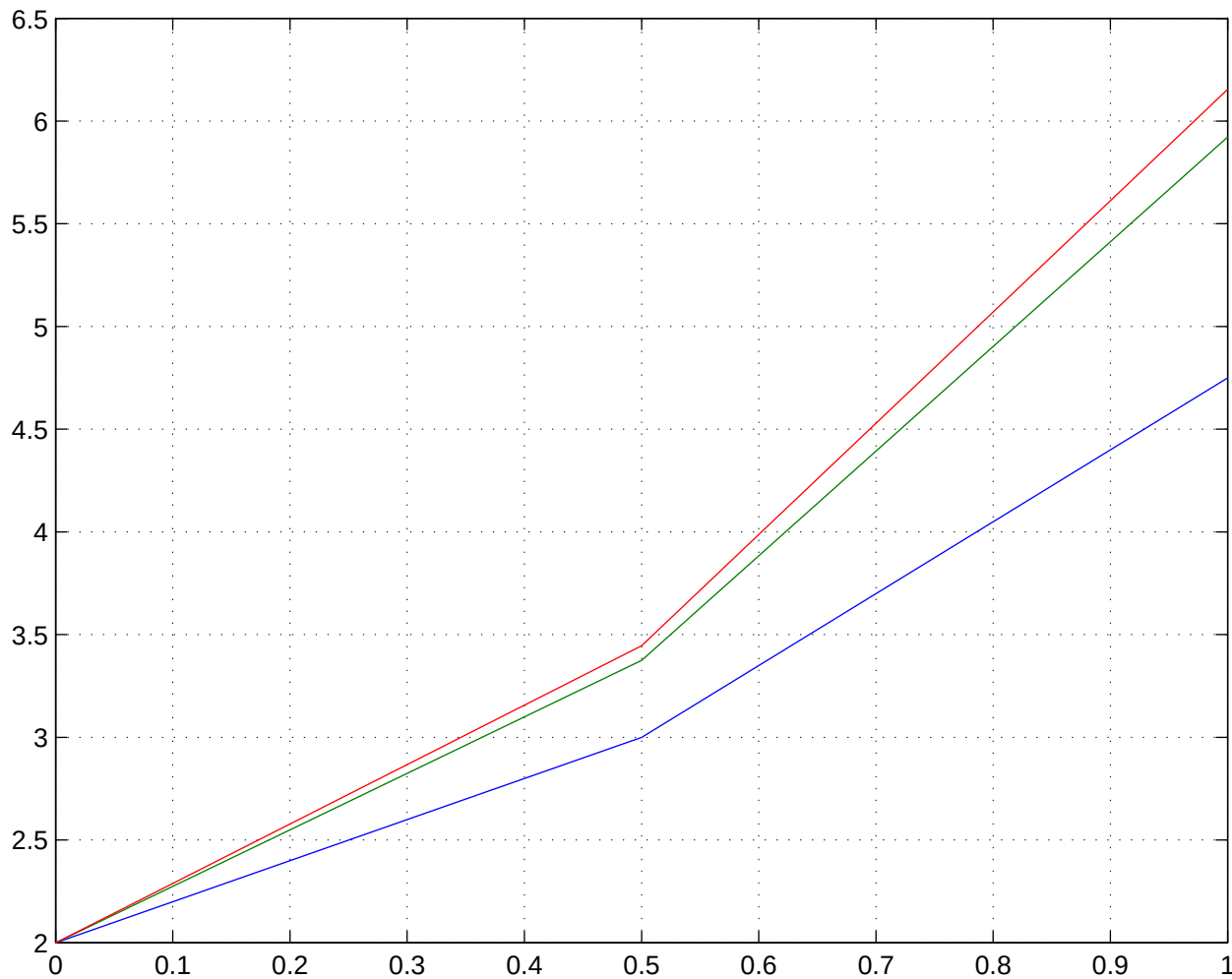
$$\begin{aligned} i = 1, \quad t_2 = 1.0 \quad : \quad k_1 &= hf(t_1, y_1) \\ &= 0.5(3.3750 + 0.5) \\ &= 1.9375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(t_1 + 0.5h, y_1 + 0.5k_1) \\ &= 0.5(3.3750 + 0.5(1.9375) + 0.5 + 0.25) \\ &= 2.5469 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + k_2 \\ &= 3.3750 + 2.5469 \\ &= 5.9219 \end{aligned}$$

Resumo :

		Euler	Cauchy	Mid-point	Exata
i	t	y	y	y	y
-	0	2	2	2	2
0	0.5	3	3.375	3.3750	3.4462
1	1.0	4.75	5.9219	5.9219	6.1548



$(h = 0.5)$

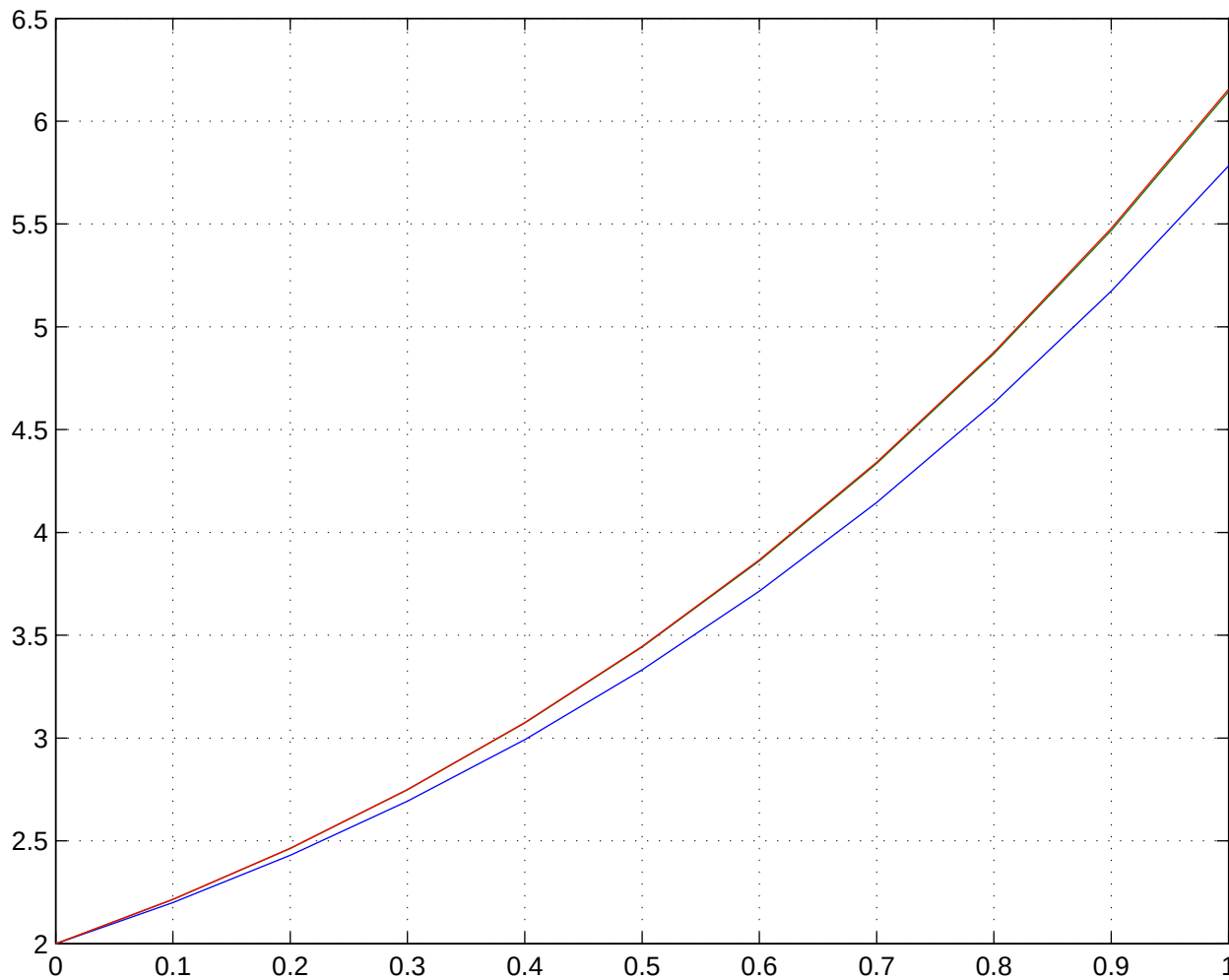
Legenda :

Exata

Mid-point

Euler

Figura 35: Solução usando Matlab. Script `exemplo4a.m`.



$(h = 0.1)$

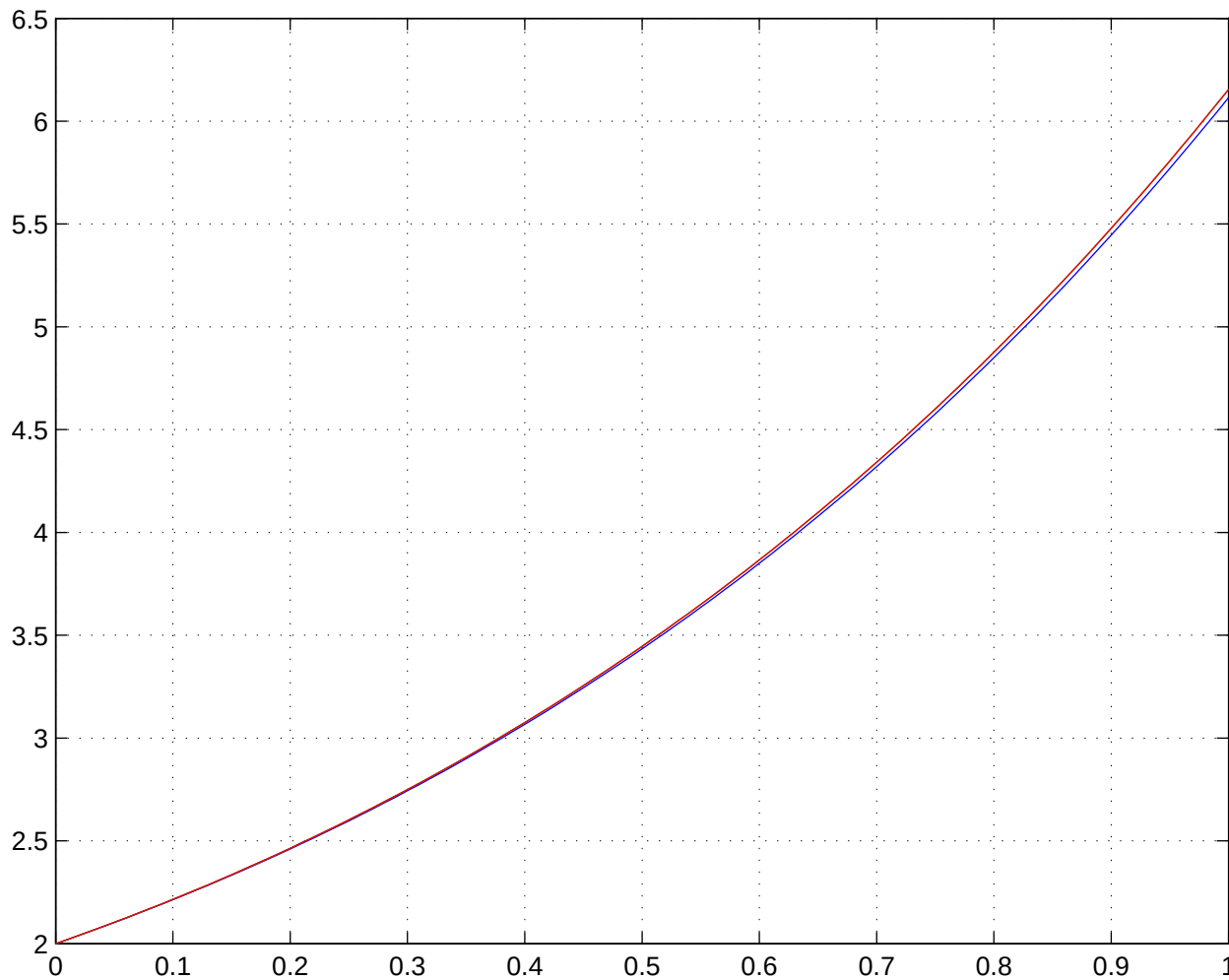
Legenda :

Exata

Mid-point

Euler

Figura 36: Solução usando Matlab. Script `exemplo4b.m`.



$(h = 0.01)$

Legenda :

Exata

Mid-point

Euler

Figura 37: Solução usando Matlab. Script `exemplo4c.m`.

Método Runge-Kutta de 2a. ordem

Generalização do método Mid-point :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \end{cases}$$

Para derivar o método de Runge-Kutta de 2a. ordem, fazemos :

$$y(t+h) = y(t) + h \left[\omega_1 f(t, y) + \omega_2 \underbrace{f(t + c_2 h, y + a_{21} k_1)}_{\text{Taylor}} \right]$$

Expansão em **série de Taylor** :

$$f(t + c_2h, y + a_{21}k_1) = f(t, y) + c_2h \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_{21}k_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + \dots$$

Portanto :

$$\begin{aligned} y(t + h) &= y(t) + h\omega_1 f + h\omega_2 f + \omega_2 c_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + \omega_2 a_{21} \underbrace{k_1}_{hf} h \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \\ &= y(t) + (\omega_1 + \omega_2)hf + h^2 \left(\omega_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial t} + \omega_2 a_{21} \frac{\partial f}{\partial y} f \right) + \dots \end{aligned}$$

Comparando com a expansão em série de Taylor de $y(t + h)$:

$$y(t + h) = y(t) + hf + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) + \dots$$

Tiramos :

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) = \omega_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial t} + \omega_2 a_{21} (f) \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto :

$$\omega_2 c_2 = \frac{1}{2},$$

$$\omega_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

Método Mid-point

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = \frac{1}{2}$$

Método de Euler modificado

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 1, \quad a_{21} = 1$$

Método Heun

$$\omega_1 = \frac{1}{4}, \quad \omega_2 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad a_{21} = \frac{2}{3}$$

Método Runge-Kutta clássico (4a. ordem)

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_1 &= hf(t_i, y_i) & (A) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) & (B) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) & (C) \\ k_4 &= hf(t_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

Nota. (A) : Aproximação por Euler.

(B) : Aproximação usando inclinação no mid-point.

(C) : Aproximação refinada.

Generalização :

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + c_2h, y_i + a_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + c_3h, y_i + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$k_m = hf(t_i + c_mh, y_i + a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{m,m-1}k_{m-1})$$

$$\vdots$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1k_1 + w_2k_2 + \cdots + w_mk_m$$

Exemplo 5 Resolver numericamente a equação

$$\dot{y} = y + t$$

Condição inicial : $y(0) = 2$

Intervalo de integração : $h = 0.5$

Intervalo de solução : $[0, 1]$

Método : Runge-Kutta clássico .

Solução analítica :

$$y = 3e^t - t - 1$$

Solução

Runge-Kutta :

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Iterações :

$$i = 0, \quad t_1 = 0.5 : \quad k_1 = hf(t_0, y_0) \\ = 0.5(2 + 0) = 1$$

$$k_2 = hf(t_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_1) \\ = 0.5(2 + 0.5 + 0 + 0.25) = 1.3750$$

$$k_3 = hf(t_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_2) \\ = 0.5(2 + 0.6875 + 0 + 0.25) = 1.4688$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3) \\ = 0.5(2 + 1.4688 + 0 + 0.5) = 1.9844$$

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ = 2 + (1 + 2(1.3750) + 2(1.4688) + 1.9844)/6 \\ = 3.4453$$

Iterações :

$$i = 1, \quad t_1 = 1.0 \quad : \quad k_1 = hf(t_1, y_1)$$

$$= 0.5(3.4453 + 0.5) = 1.9727$$

$$k_2 = hf(t_1 + 0.5h, y_1 + 0.5k_1)$$

$$= 0.5(3.4453 + 0.5(1.9727) + 0.5 + 0.25) = 2.5908$$

$$k_3 = hf(t_1 + 0.5h, y_1 + 0.5k_2)$$

$$= 0.5(3.4453 + 0.5(2.5908) + 0.5 + 0.25) = 2.7454$$

$$k_4 = hf(t_1 + h, y_1 + k_3)$$

$$= 0.5(3.4453 + 2.7454 + 0.5 + 0.5) = 3.5953$$

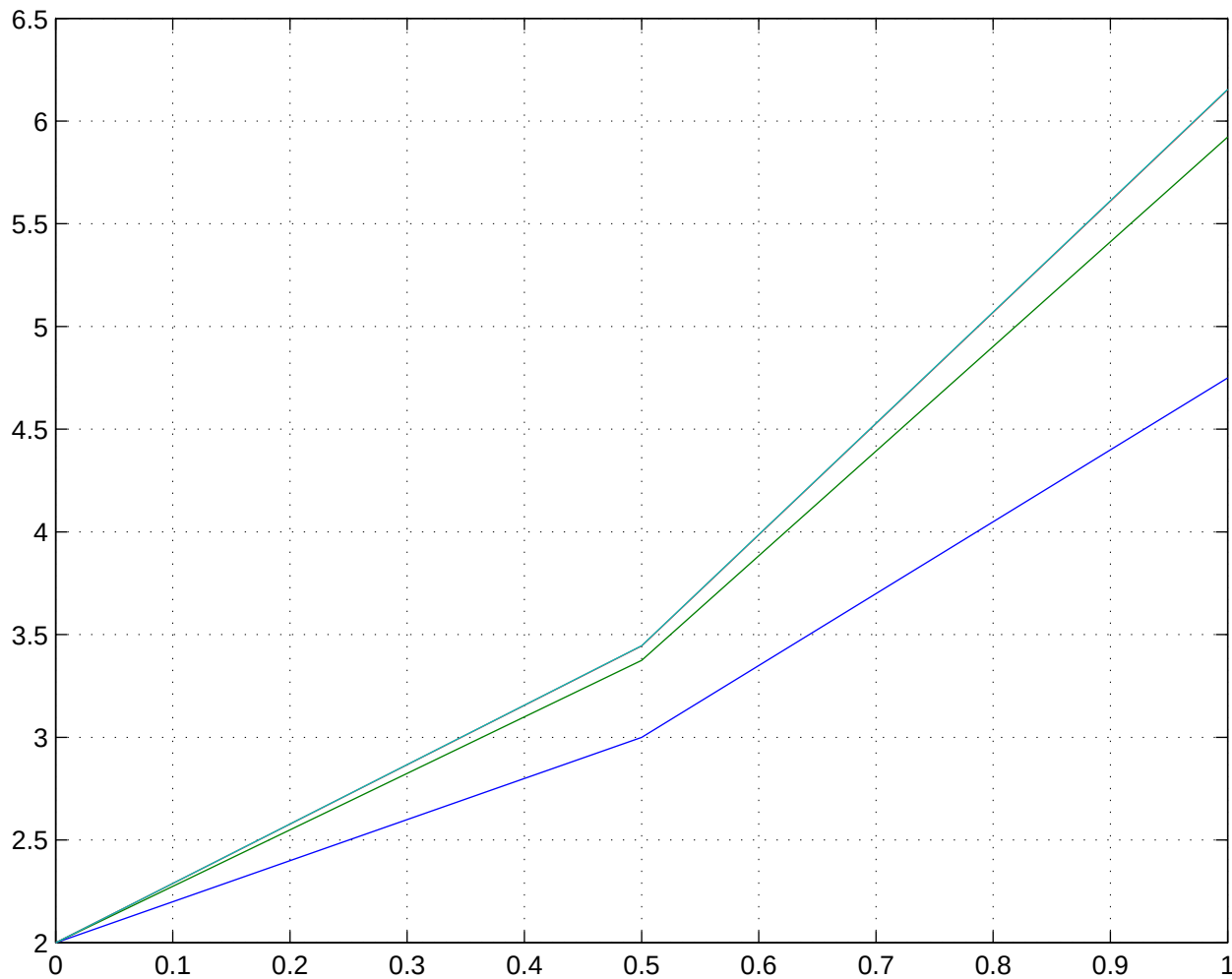
$$y_2 = y_1 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$= 3.4453 + (1.9727 + 2(2.5908) + 2(2.7454) + 3.5953)/6$$

$$= 6.1520$$

Resumo :

		Euler	Cauchy	Mid-point	Runge-Kutta	Exata
i	t	y	y	y	y	y
-	0	2	2	2	2	2
0	0.5	3	3.375	3.3750	3.4453	3.4462
1	1.0	4.75	5.9219	5.9219	6.1520	6.1548



$(h = 0.5)$

Legenda :

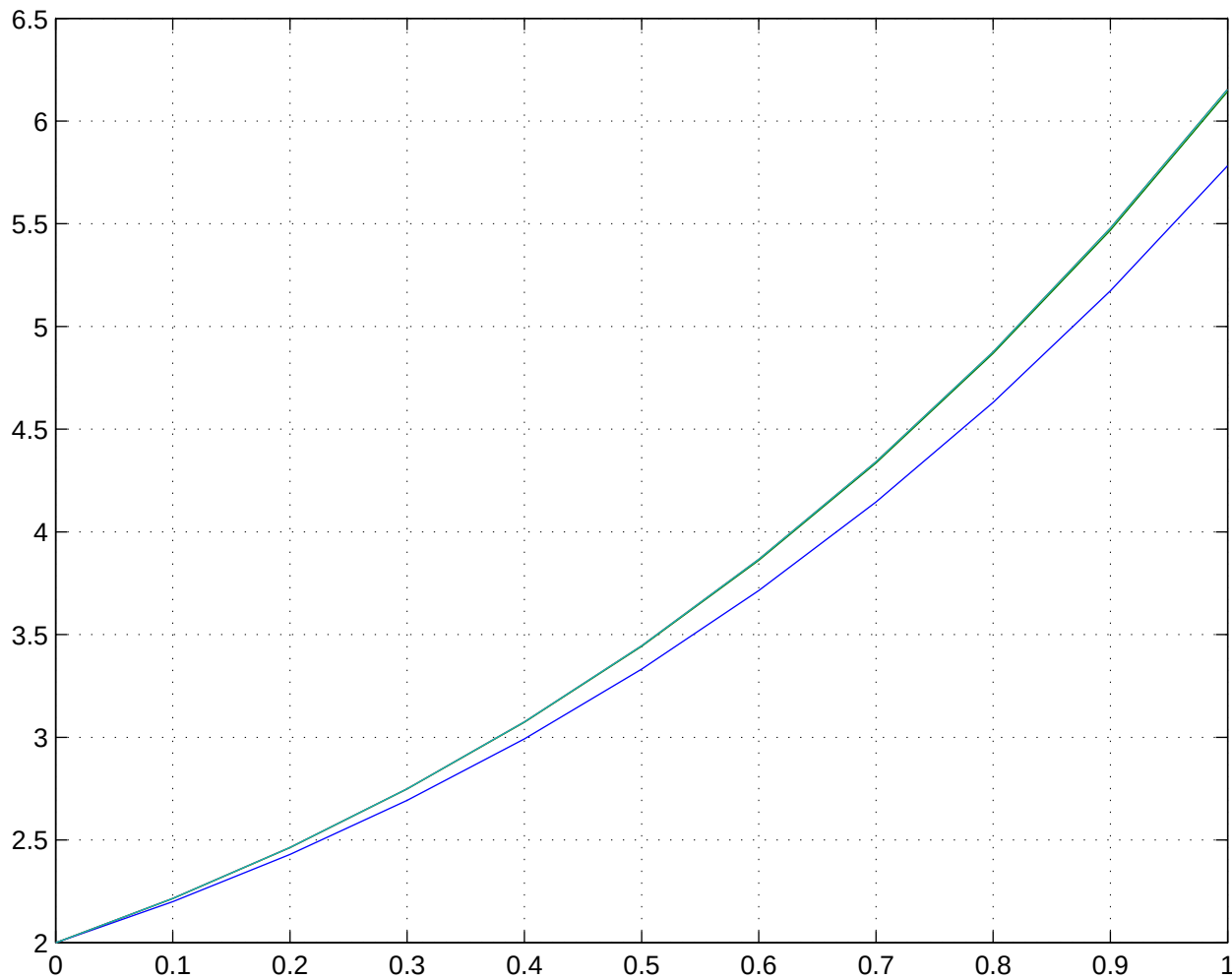
Exata

Runge-Kutta

Mid-point

Euler

Figura 38: Solução usando Matlab. Script `exemplo5a.m`.



$(h = 0.1)$

Legenda :

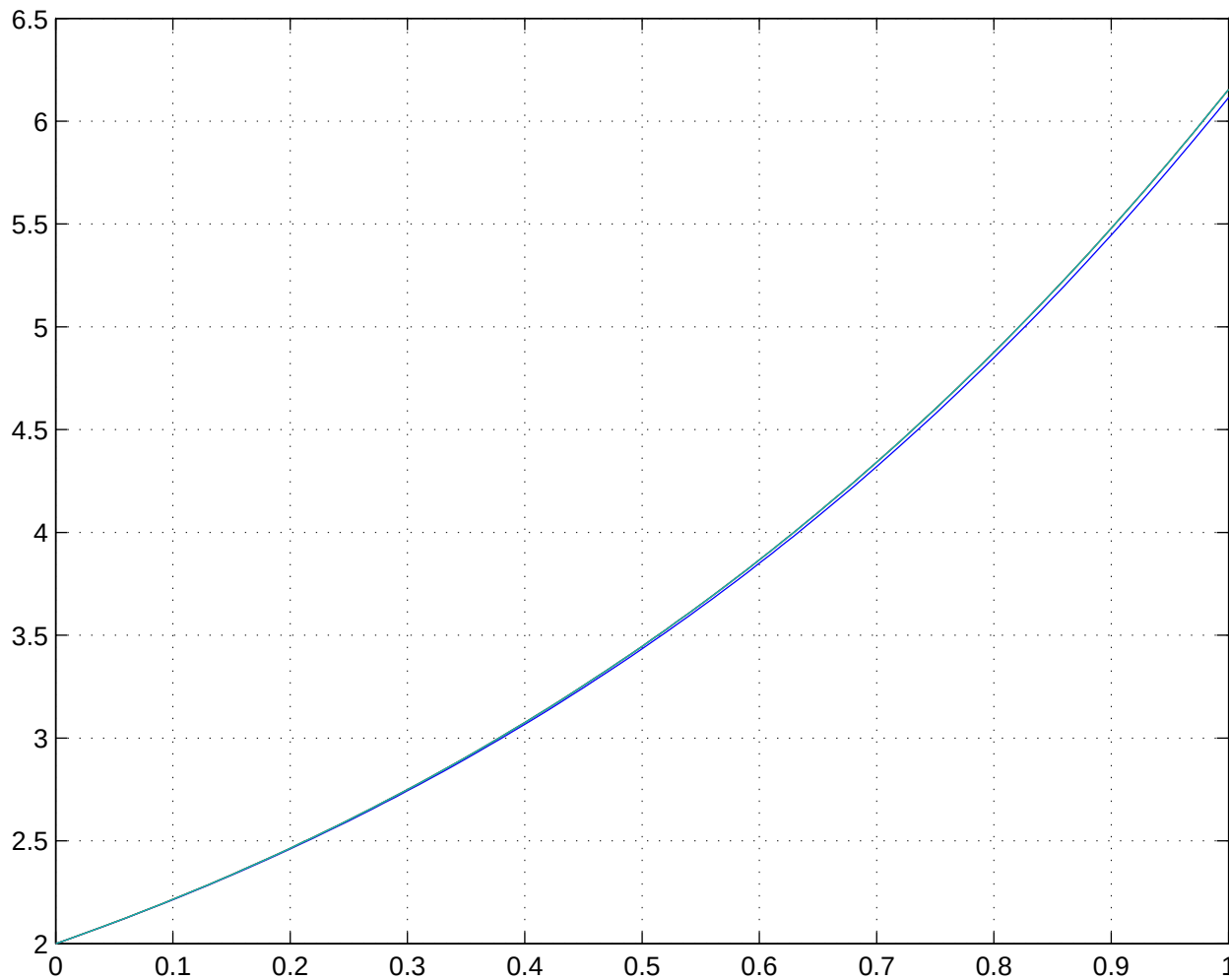
Exata

Runge-Kutta

Mid-point

Euler

Figura 39: Solução usando Matlab. Script `exemplo5b.m`.



$(h = 0.01)$

Legenda :

Exata

Runge-Kutta

Mid-point

Euler

Figura 40: Solução usando Matlab. Script `exemplo5c.m`.

Exemplo 6

Resolver numericamente a equação de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y - cy^3 \end{cases}$$

Contante : $c = 1$ Condição inicial : $x(0) = 1$
 $y(0) = 1$ Intervalo de integração : $h = 0.5$ Intervalo de solução : $[0, 10]$

Método : Runge-Kutta clássico (4a. ordem)

★ Esse sistema não possui solução analítica.

Solução

Usando notação vetorial :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{bmatrix} = f(t, z)$$

Runge-Kutta :

$$k_1 = hf(t_i, z_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

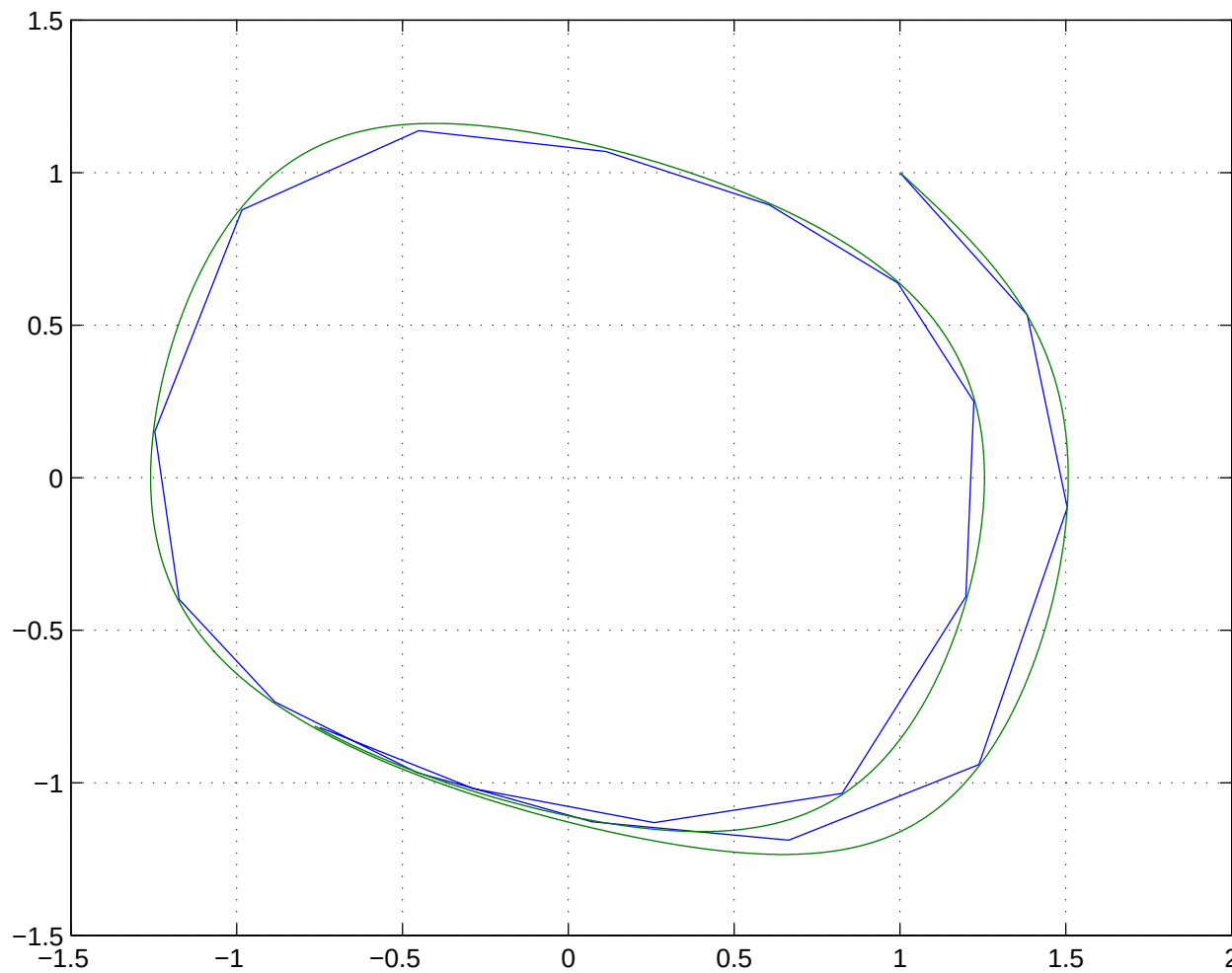
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, z_i + k_3)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Resumo :

	RK clássico		“Exata”	
t	x	y	x	y
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.5046	-0.0981	1.5040	-0.1007
2	0.6645	-1.1878	0.6647	-1.2345
3	-0.4559	-0.9662	-0.4674	-0.9690
4	-1.1737	-0.3985	-1.1818	-0.3893
5	-0.9843	0.8774	-0.9779	0.8953
6	0.1121	1.0695	0.1262	1.0767
7	0.9936	0.6382	1.0055	0.6303
8	1.1987	-0.3901	1.1958	-0.4155
9	0.2588	-1.1304	0.2446	-1.1505
10	-0.7486	-0.8188	-0.7647	-0.8136



Legenda :

$h = 0.5$

$h = 0.001$

Figura 41: Solução usando Matlab. Script **exemplo6.m**.

8.4 Métodos multipassos

- Introdução
- Método de Adams-Bashforth
 - Exemplos: [1] [2]
- Método de Adams-Moulton
 - Exemplos: [3] [4]

Introdução

Forma geral :

$$y_{i+1} = a_1 y_i + a_2 y_{i-1} + h \left[b_0 f(t_{i+1}, y_{i+1}) + b_1 f(t_i, y_i) + b_2 f(t_{i-1}, y_{i-1}) \right]$$

ou, usando notação simplificada

$$y_{i+1} = a_1 y_i + a_2 y_{i-1} + h \left[b_0 f_{i+1} + b_1 f_i + b_2 f_{i-1} \right]$$

Método de Adams-Bashforth

★ Método explícito.

2 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}]$$

Inicialização : y_0 : Condição inicial

y_1 : calculado usando método R-K

★ Neste método : $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 3/2$, $b_2 = -1/2$.

3 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$$

4 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

5 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}]$$

Exemplo 7

(...)

Exemplo 8

(...)

Método de Adams-Moulton

★ Método implícito.

2 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]$$

3 passos :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Exemplo 9

(...)

Exemplo 10

(...)

Exercício.

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 9

9 Sinais e sistemas discretos no tempo

Conteúdo

1. Overview
2. Introdução
3. Seqüências
4. Sistemas discretos
5. Sistemas lineares invariantes no tempo
6. Propriedades de SDLITs
7. Equações a diferenças
8. Representação no domínio da frequência
9. Transformada de *Fourier*
10. Propriedades da transformada de *Fourier*
11. Teoremas da transformada de *Fourier*

9.1 Overview

Parte II - Sistemas discretos

Capítulo 2

- Sinais discretos
- Sistemas discretos
- Sistema lineares
- Equações a diferenças
- Representação no domínio da frequência
- Transformada de Fourier

Capítulo 3

- Amostragem de sinais contínuos
- Reconstrução
- Filtro anti-aliasing
- Quantização

Capítulo 4

- Transformada z
- Transformada z inversa
- Propriedades

Capítulo 5

- Análise de SDLIT

Capítulo 8

- Transformada discreta de Fourier

9.2 Introdução

Motivação :

- ★ Facilidade de implementação
- ★ Custo reduzido para aplicações simples
- ★ Existência de elementos muito eficientes

Exemplo 1 (Diniz, Silva & Neto 2002, pag. 5)

Suponha que se deseja fazer a seguinte operação com um sinal contínuo :

$$y(t) = \frac{\cosh \left[\ln (|x(t)|) + x^3(t) + \cos^3 \left(\sqrt{|x(t)|} \right) \right]}{5x^5(t) + e^{x(t)} + \tan (x(t))}$$

Sinal de entrada $x(t)$

Sinal de saída $y(t)$

★ Virtualmente, não há limites para a complexidade!

Exemplo 2 Elementos eficientes

Anexo : DSP da Analog Devices

Características : (...)

Notação :

Sinal analógico :

$$x_a(t)$$

Seqüência :

$$x[n] = x_a(nT), \quad (-\infty < n < \infty)$$

Intervalo de amostragem :

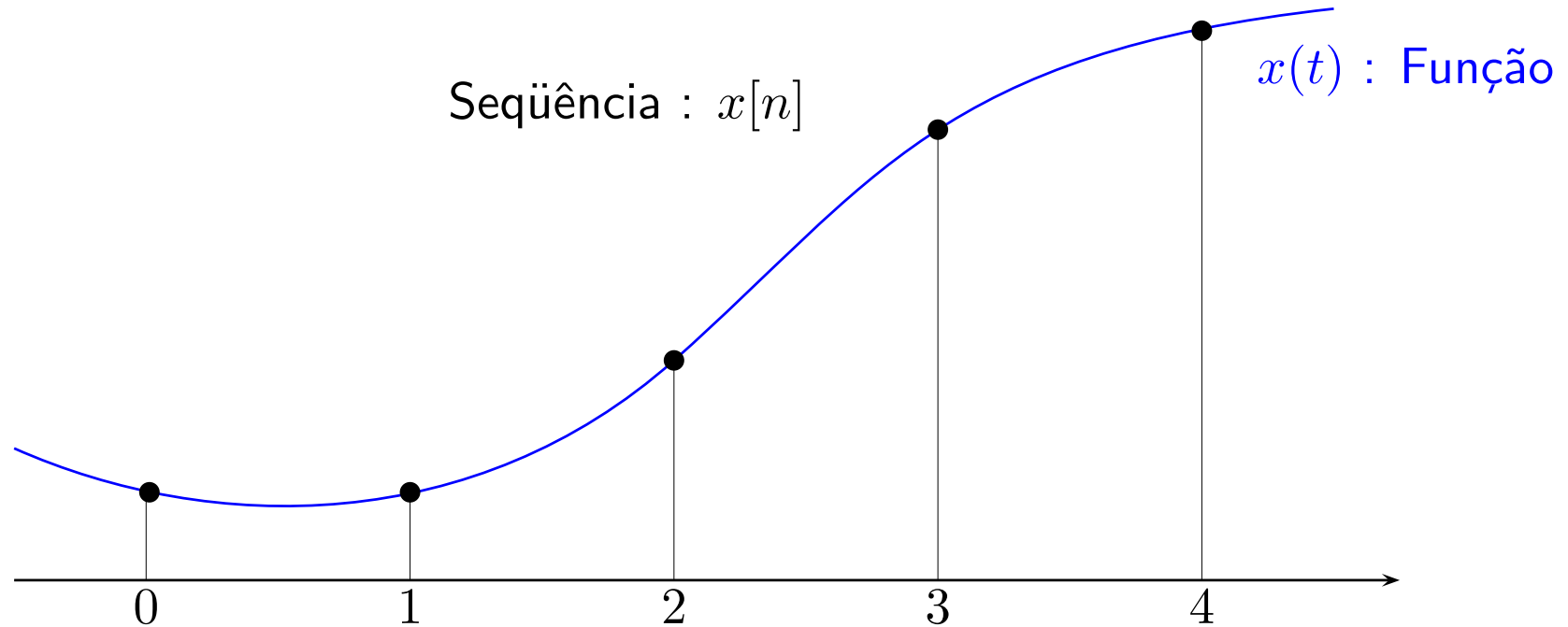
$$T$$

Frequência de amostragem :

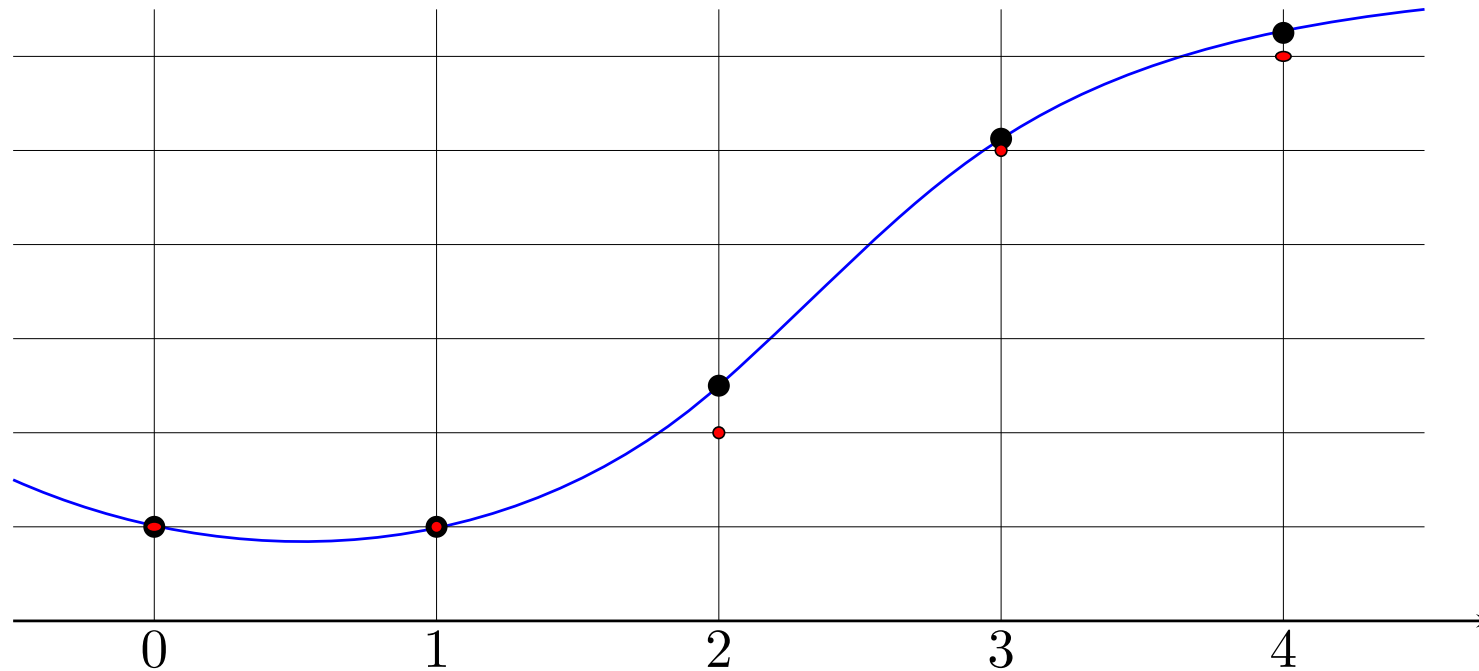
$$f_s = \frac{1}{T}$$

Frequência angular de amostragem :

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$$

Exemplo 3 Discretização.

★ $x(t)$: Função (sinal analógico)
 $x[n]$: Seqüência

Exemplo 4 Digitalização.

★ $x(t)$: Função (sinal analógico)

$x[n]$: Seqüência

Importante :

- ★ A digitalização é uma operação não linear.
- ★ A discretização é uma digitalização com precisão infinita.
- ★ Neste curso consideraremos apenas sinais discretos de 1 dimensão.
- ★ O efeito da digitalização é avaliado via simulação.

Importante :

- ★ Sob certas condições, as representações contínua e discreta de um mesmo sinal são **equivalentes**.
- ★ Nem toda seqüência é obtida por discretização.
- ★ Existem diferenças fundamentais entre sistemas contínuos e discretos.

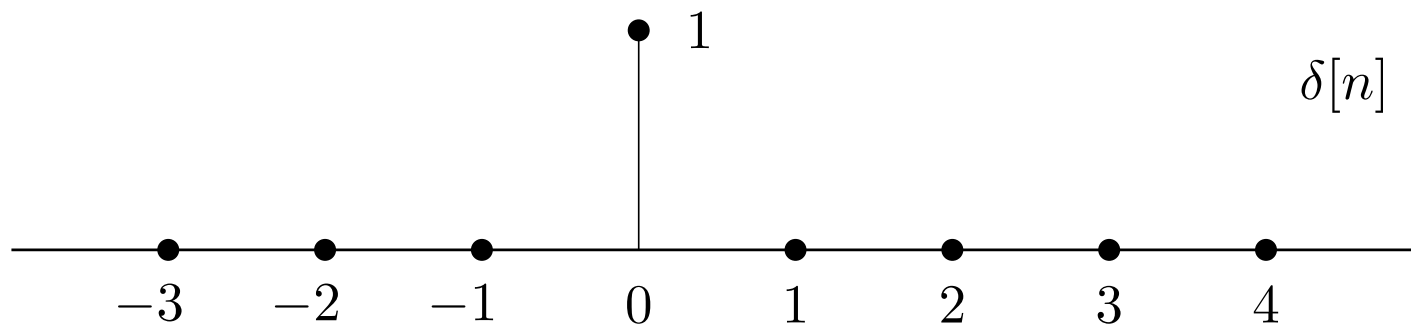
9.3 Seqüências

- ★ Sinais discretos são representados matematicamente como seqüências .
- ★ Cuidado : não é correto assumir $x[n] = 0$ para n não inteiro.
- ★ Vamos iniciar vendo algumas seqüências básicas importantes.

Sequências básicas

Pulso unitário :

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



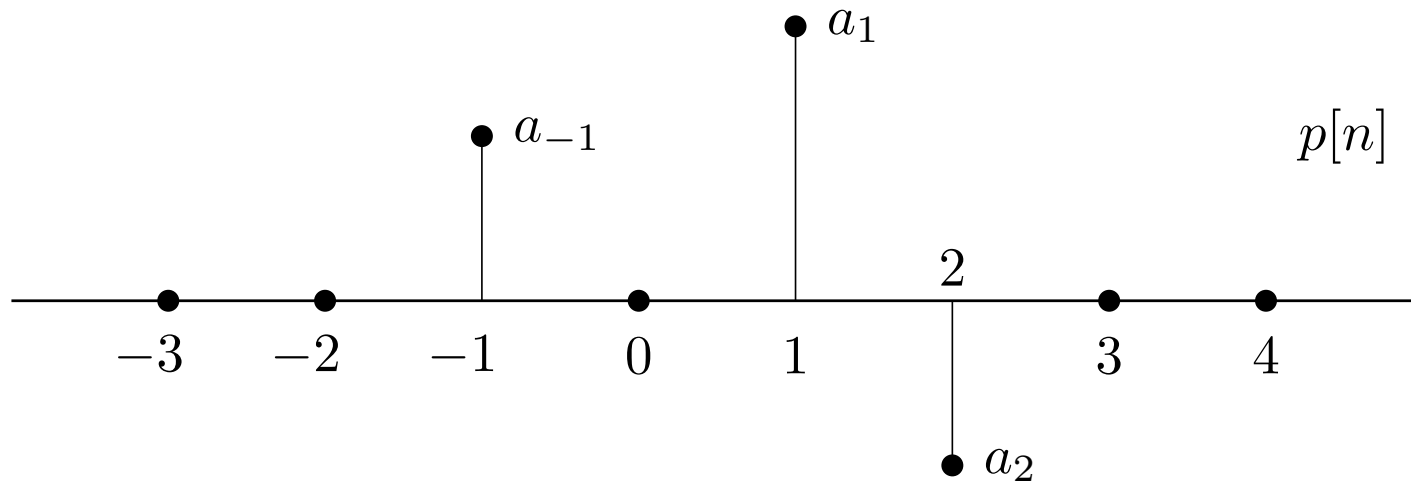
★ Não tem as complicações do impulso contínuo. Definição **simple e precisa**.

Fato. Toda seqüência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de pulsos deslocados e escalados.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

$x[k]$: escalar

$\delta[n - k]$: seqüência

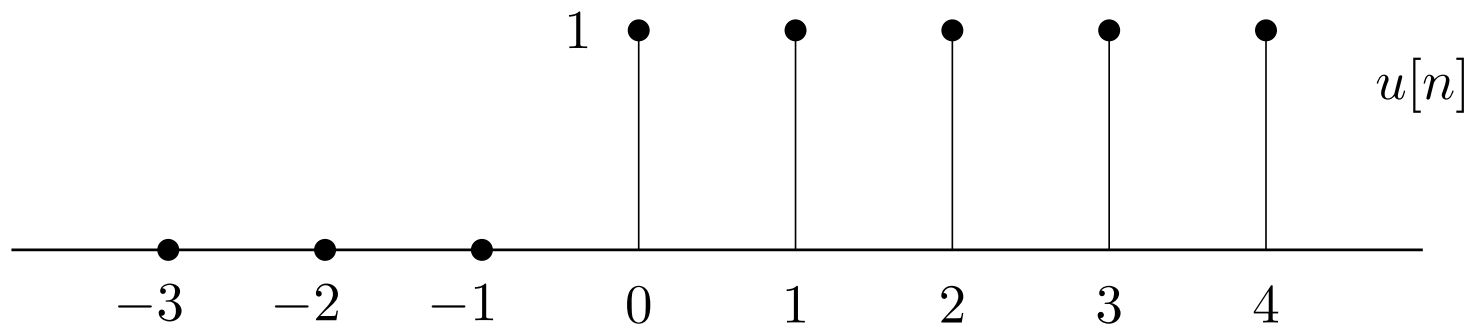
Exemplo 5

$$p[n] = a_{-1}\delta[n+1] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2]$$

Seqüências básicas

Degrau unitário :

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Fato. Relação entre degrau e pulso unitários :

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

(Acumulador)

Seqüências básicas

Senóide : $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, $\forall n$

A = amplitude

ω_0 = freqüência (em radianos/s)

ϕ = fase

Seqüências básicas

Exponencial :

$$x[n] = A\alpha^n$$

Seqüências básicas

Exponencial complexa : $(|\alpha| = 1)$

$$\begin{aligned}x[n] &= |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \phi)\end{aligned}$$

A = amplitude

ω_0 = freqüência (em radianos/s)

ϕ = fase

Fato. Exponenciais complexas com frequências $(\omega_0 + 2\pi n)$ se confundem.

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} \\ &= Ae^{j\omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 = Ae^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

★ Somente precisamos considerar $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$ ou $\omega_0 \in [0, 2\pi)$.

Exemplo 6 (*Aliasing*)

$$x_0[n] = Ae^{j\omega_0 n}$$

$$x_1[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n}$$

$$x_2[n] = Ae^{j(\omega_0 + 4\pi)n}$$

$$A = 1$$

$$\omega_0 = 1.5$$

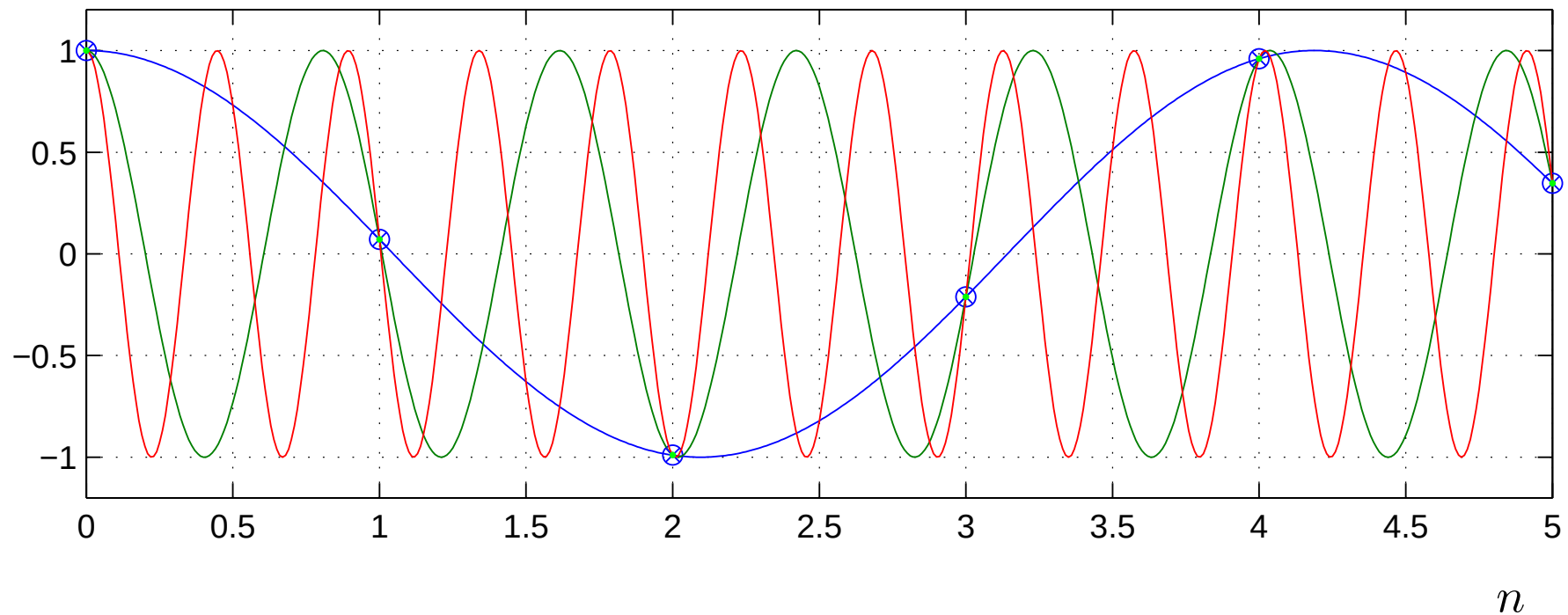


Figura 42: Parte real das seqüências $x_0[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$.

Script **exemplo06.m**.

Fato. A periodicidade de sinais discretos é diferente da de contínuos.

Seqüência periódica : $x[n] = x[n + N]$, $\forall n$

Portanto, para uma senóide ser periódica :

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0 N = (2\pi)k$$

Condição para periodicidade

Exemplo 7 Seqüência periódica

$$x[n] = A \cos \left(\frac{3\pi}{4} n + \phi \right) .$$

É periódica para $N = 8$:

$$\begin{aligned} A \cos \left(\frac{3\pi}{4} n + \frac{3\pi}{4} N + \phi \right) &= A \cos \left(\frac{3\pi}{4} n + \frac{3\pi}{4} 8 + \phi \right) \\ &= A \cos \left(\frac{3\pi}{4} n + 6\pi + \phi \right) \end{aligned}$$

★ $\frac{3\pi}{4} 8 = 6\pi =$ múltiplo inteiro de 2π .

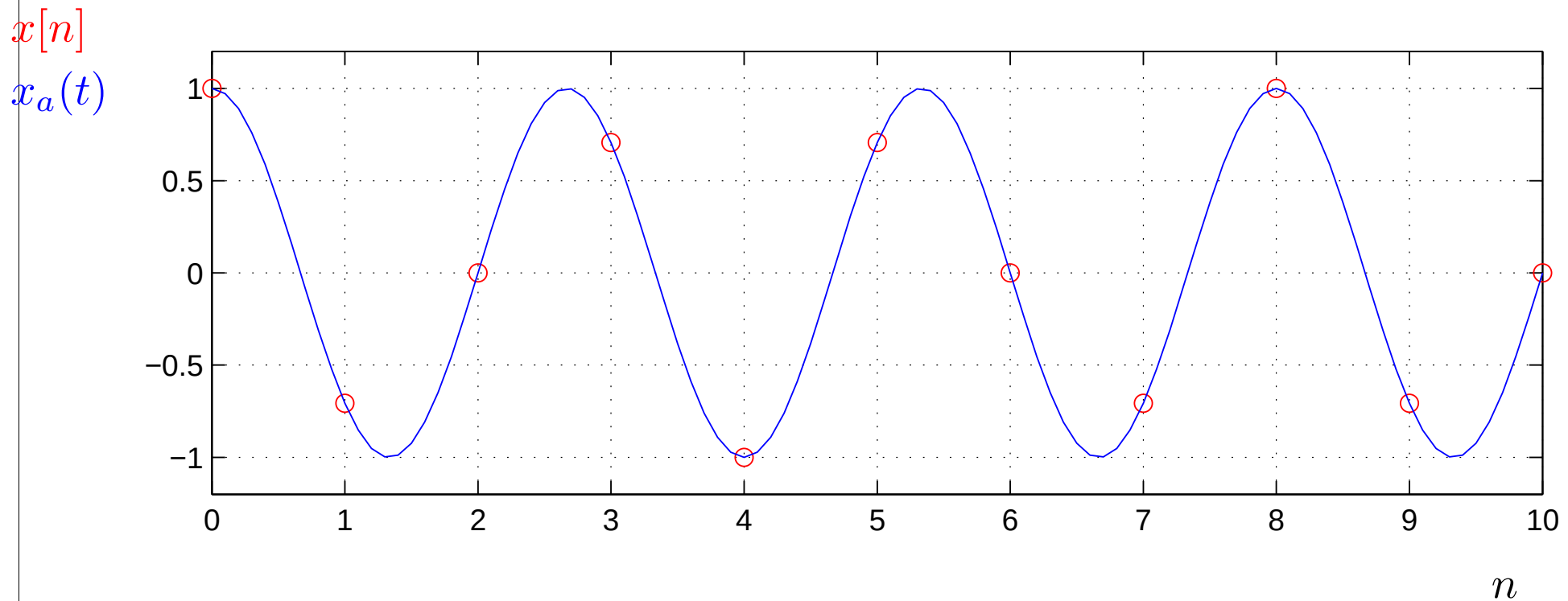


Figura 43: Seqüência periódica : $x[n] = A \cos \left(\frac{3\pi}{4}n + \phi \right)$.

Script **exemplo07.m** .

Exemplo 8 Sequência não periódica

$$x[n] = A \cos \left(\frac{9}{4}n + \phi \right) .$$

$$A \cos \left(\frac{9}{4}n + \phi \right) \neq A \cos \left(\frac{9}{4}n + \frac{9}{4}N + \phi \right)$$

★ $\frac{9}{4}N \neq (2\pi)k, \quad \forall N, \forall k \text{ inteiros.}$

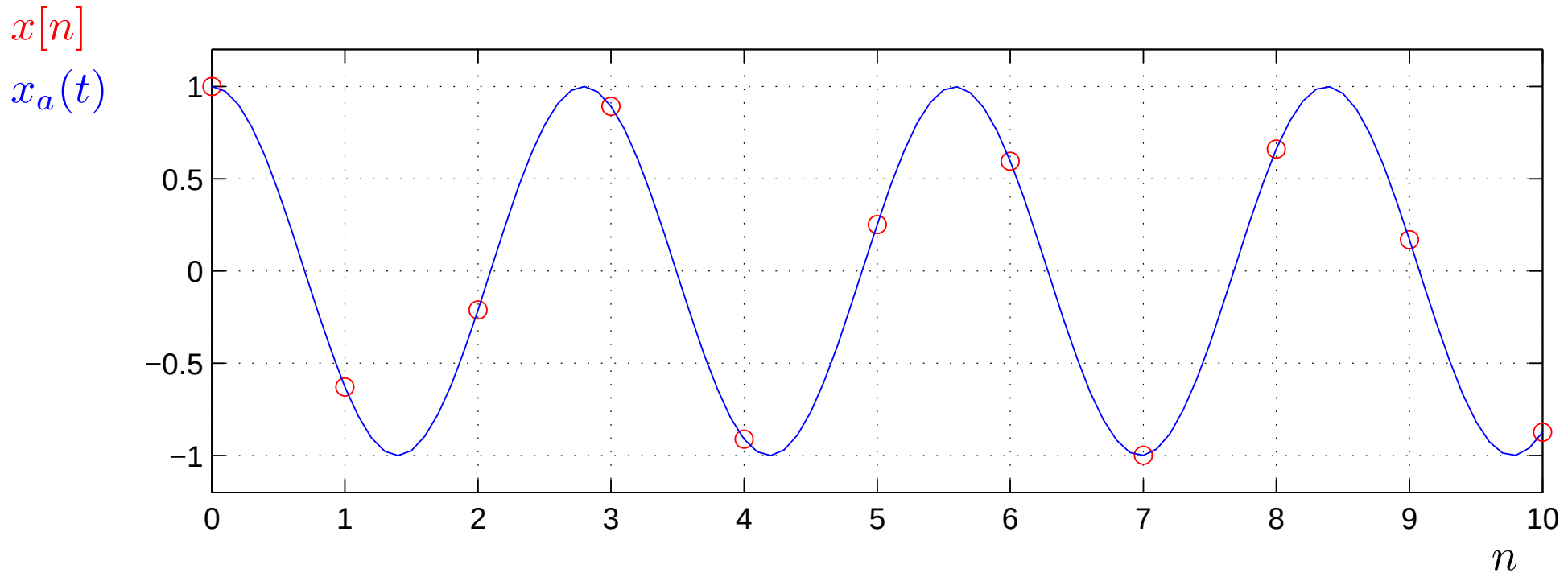


Figura 44: Seqüência não periódica : $x[n] = A \cos\left(\frac{9}{4}n + \phi\right)$.

Script **exemplo08.m**.

Fato. Altas frequências x baixas frequências.

Altas frequências : ω_0 próximo de $(2\pi)k$.

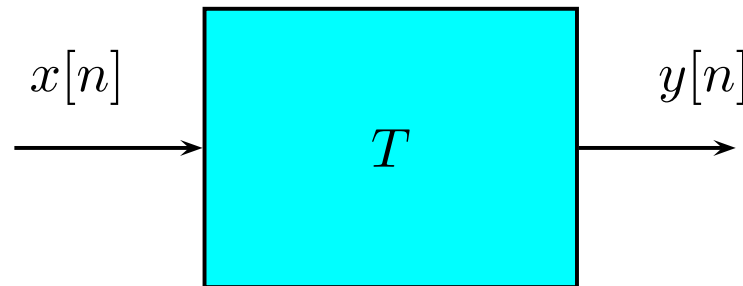
Baixas frequências : ω_0 próximo de $(\pi + 2\pi k)$.

(...)

9.4 Sistemas discretos

Um sistema discreto é definido matematicamente como uma transformação ou operador :

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



Exemplo 9 Média móvel

Algoritmo da média móvel :

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Para $M_1 = 3$ e $M_2 = 2$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{3 + 2 + 1} \sum_{k=-3}^2 x[n - k] \\ &= \frac{1}{6} \left(x[n + 3] + x[n + 2] + x[n + 1] + x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] \right) \end{aligned}$$

Considere 2 sinais de entrada distintos :

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\}$$

$$y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

Propriedade (*Aditividade*)

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

Propriedade (*Homogeneidade*)

$$T\{ax_i[n]\} = aT\{x_i[n]\} = ay_i[n]$$

Combinando-se estas 2 propriedades, tem-se o ...

Princípio da superposição

$$T\{a x_1[n] + b x_2[n]\} = a y_1[n] + b y_2[n]$$

Propriedade (*Linearidade*)

A classe de sistemas discretos que satisfaz o princípio da superposição é dito **linear**.

Notação SDL : sistema discreto linear.

Exemplo 10

Sistemas lineares :

$$y[n] = x[n - n_d]$$

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Sistemas não-lineares :

$$y[n] = x^2[n]$$

Propriedade (*Invariância no tempo*)

Um sistema é invariante no tempo se, $\forall n_0$,

a entrada

$$x_1 = x[n - n_0]$$

produz a saída

$$y_1 = y[n - n_0] .$$

Exemplo 11 Compressor

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty$$

$$\begin{aligned} M=2 \quad \Rightarrow \quad & y[0] = x[0] \\ & y[1] = x[2] \\ & y[2] = x[4] \\ & \vdots \end{aligned}$$

Este sistema é variante para $M \neq 1$.

Verificação

Seqüência de entrada atrasada :

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

Compressão de $x_1[n]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[Mn] \\ &= x[Mn - n_0] \end{aligned}$$

Porém, a seqüência de saída atrasada é

$$\begin{aligned} y[n - n_0] &= x[M(n - n_0)] \\ &\neq y_1[n] \end{aligned}$$

Verificação

Seqüência de entrada : $x[n] = \{a, b, c, d, e, \dots\}$

Compressão : $y[n] = x[Mn] = \{a, c, e, \dots\}$

Atraso : $y[n - 1] = x[Mn - 1] = \{0, a, c, e, \dots\}$

Seqüência atrasada : $x_1[n] = x[n - 1] = \{0, a, b, c, d, e, \dots\}$

Compressão : $y_1[n] = x_1[Mn] = x[M(n - 1)] = \{0, b, d, \dots\}$

Propriedade (*Causalidade*)

Um sistema é causal se a seqüência de saída no instante n_0 só depende da seqüência de entrada até n_0 .

★ O sistema é não antecipativo .

Exemplo 12

Sistemas causais :

$$y[n] = x[n - n_d], \quad n_d \geq 0$$

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k], \quad -M_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad M_2 \geq 0$$

Sistemas não-causais :

(...)

9.5 Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT)

Um SLIT pode ser completamente caracterizado pela sua resposta ao pulso .

Seja $h_k[n]$ a resposta do SL a $\delta[n - k]$ (pulso no instante k), i.e.,

$$h_k[n] = T \{ \delta[n - k] \}$$

Então :

$$y[n] = Tx[n] = T \underbrace{\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\}}_{x[n]}$$

Pelo princípio da superposição :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{T\left\{\delta[n-k]\right\}}_{h_k[n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$

Se o sistema for invariante,

$$T\left\{\delta[n-k]\right\} = h_k[n]$$

Então a resposta do SLIT é :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

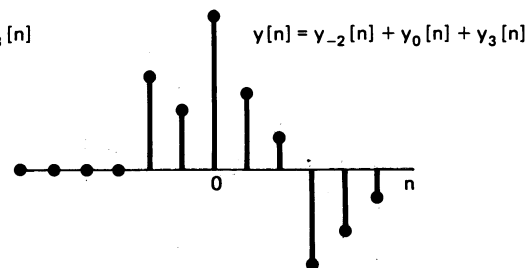
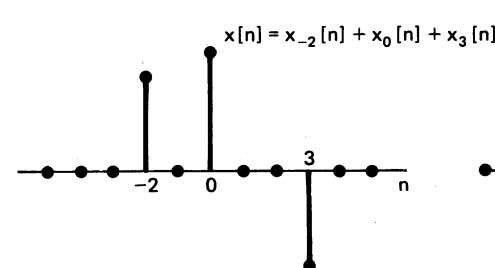
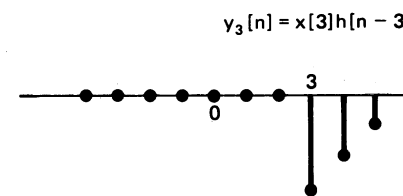
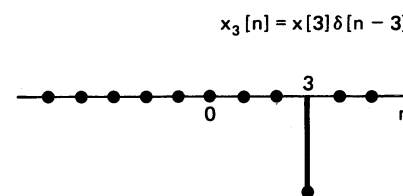
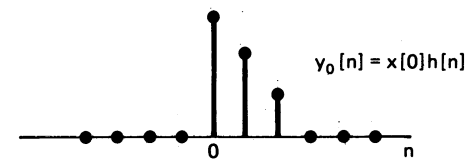
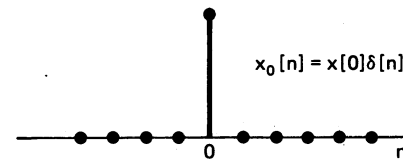
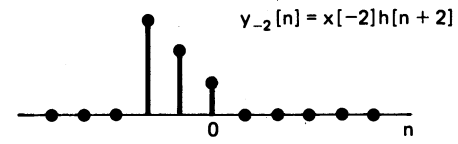
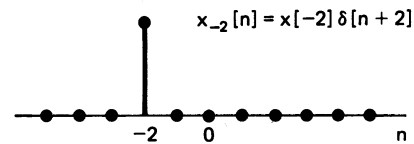
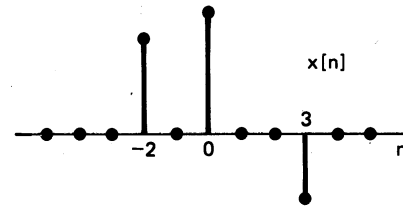
Somatório de convolução

- ★ Para se determinar a resposta de um SDLIT a qualquer entrada, basta o conhecimento de sua resposta ao pulso unitário.

Notação :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Exemplo 13



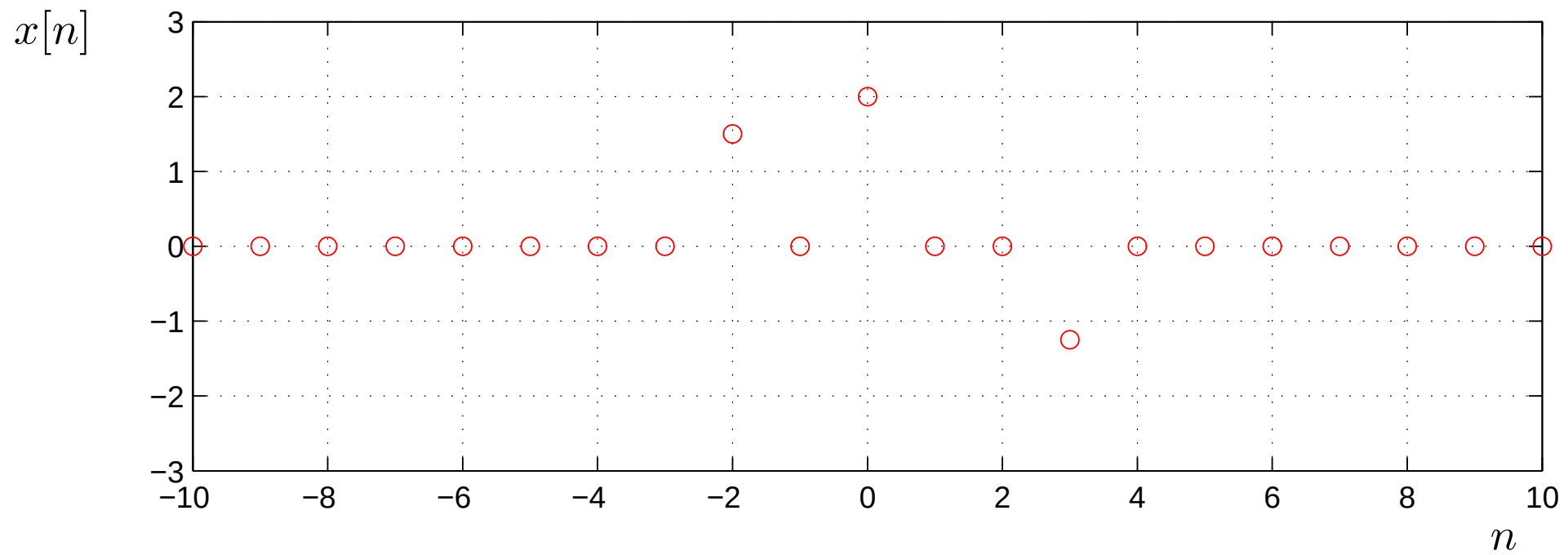


Figura 45: Seqüência de entrada.

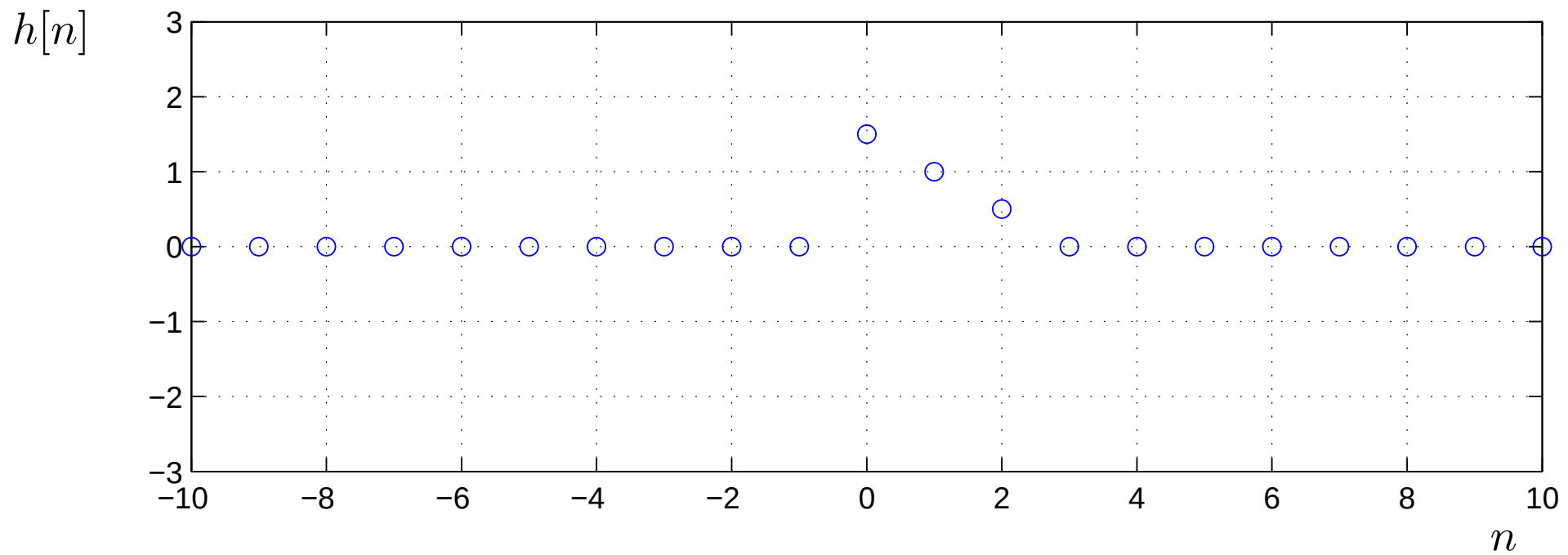


Figura 46: Resposta ao pulso.

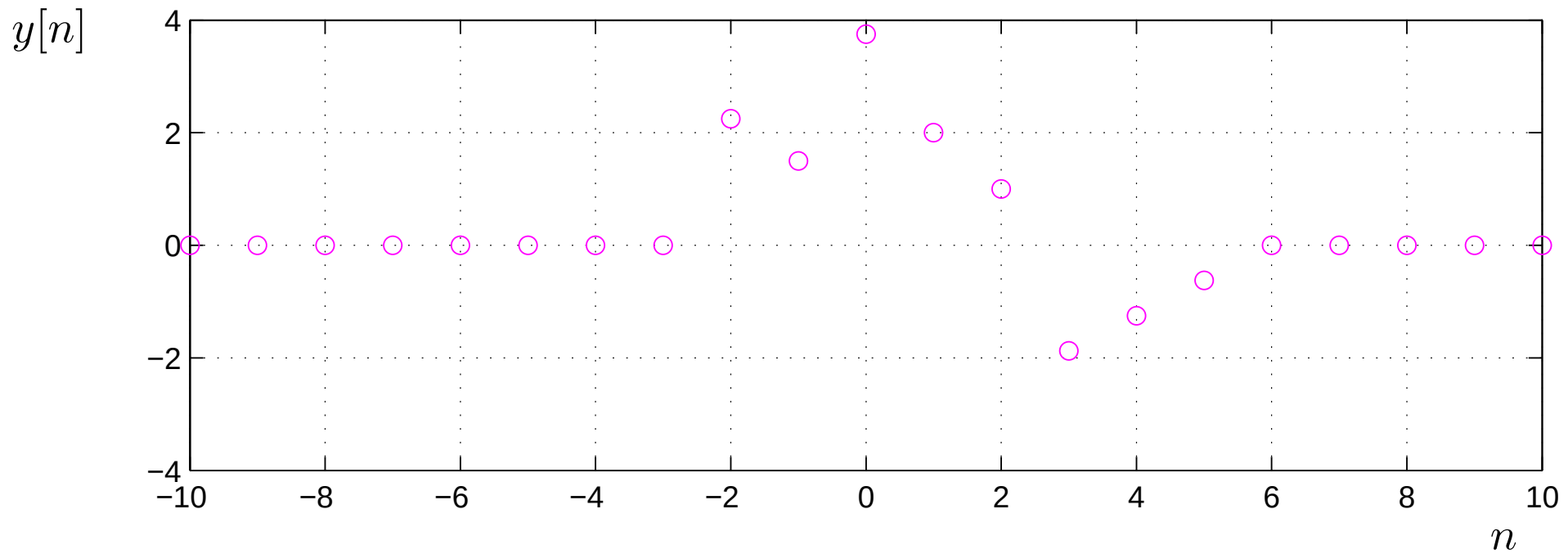


Figura 47: Seqüência de saída.

Script **exemplo13.m**.

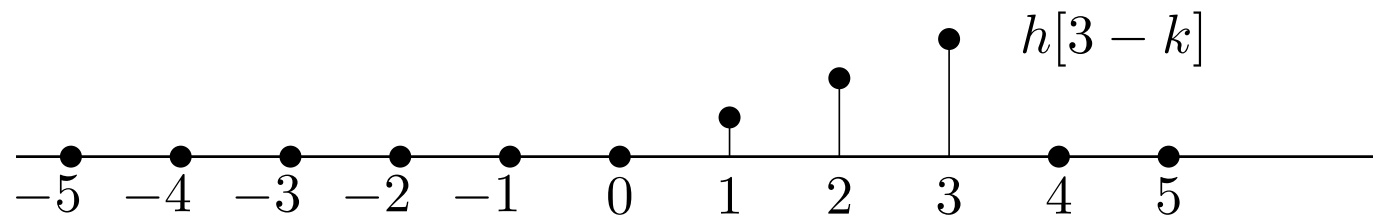
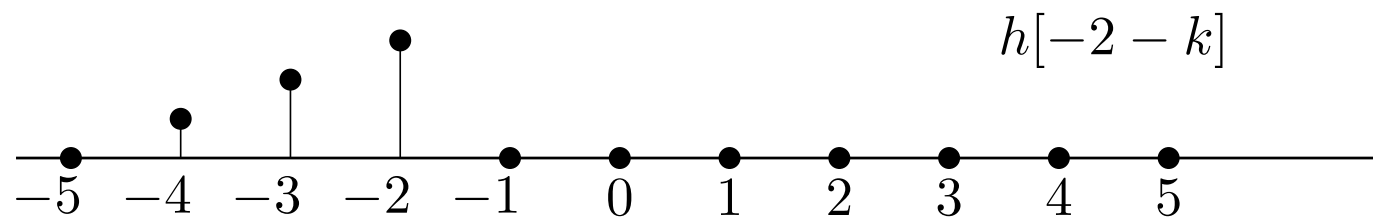
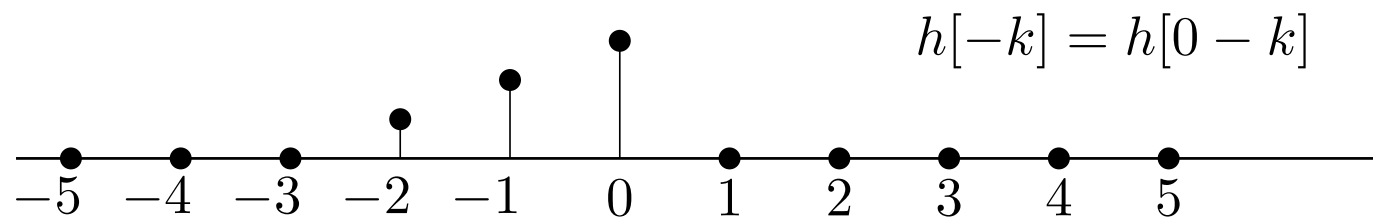
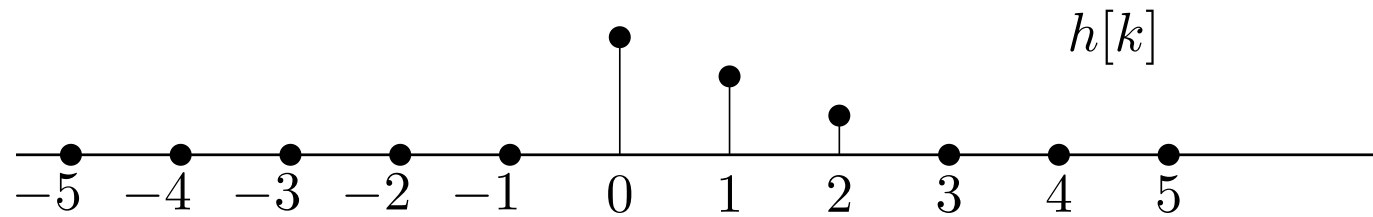
Interpretação alternativa

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Esta fórmula pode ser utilizada para calcular y a cada instante “ n ”.

Exemplo 14

Para o mesmo sistema do exemplo anterior :



Exemplo 15

2.8 pag. 25.

(...)

9.6 Propriedades de SDLITs

A convolução é comutativa

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Quer dizer,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

Prova. Basta uma substituição de variáveis :

$$\boxed{m = n - k} \Rightarrow k = n - m$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \end{aligned}$$

$$k = n - m = -\infty \Rightarrow -m = -\infty - n \Rightarrow m = n + \infty \Rightarrow m = \infty$$

ou melhor,

$$\boxed{y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m]} = h[n] * x[n]$$

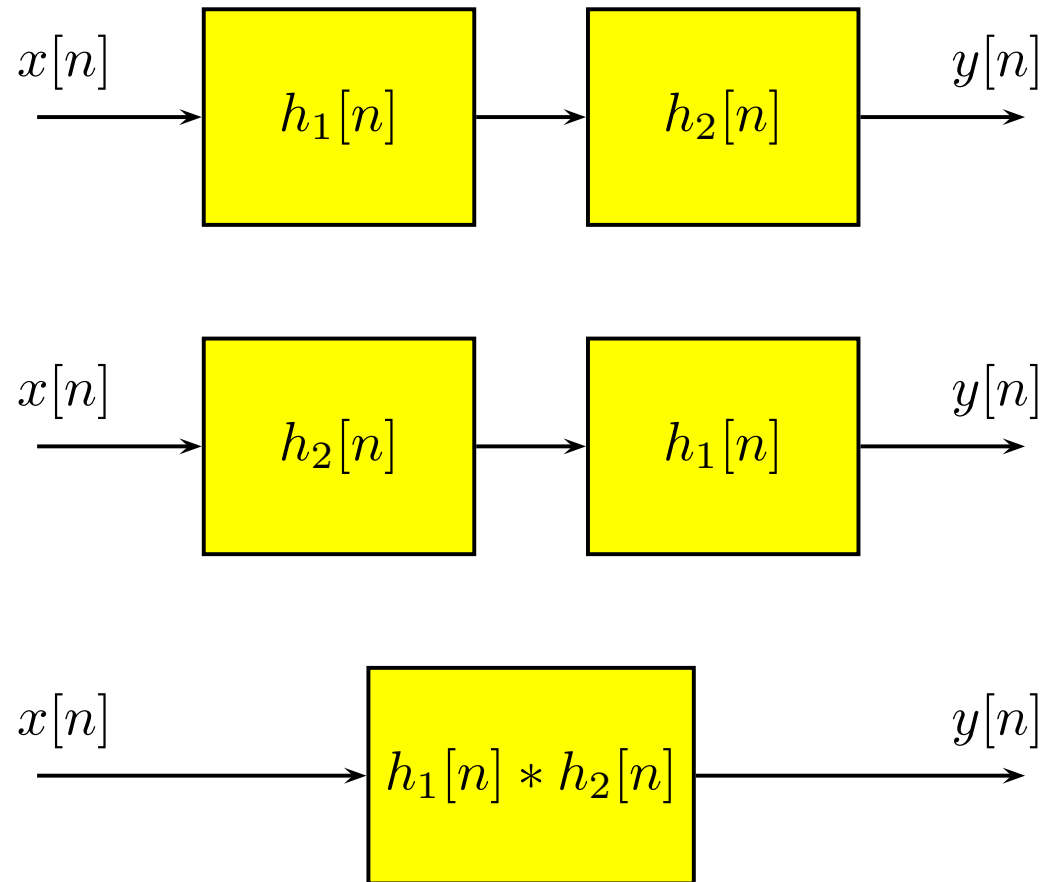


Figura 48: A convolução é comutativa.

A convolução é distributiva

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

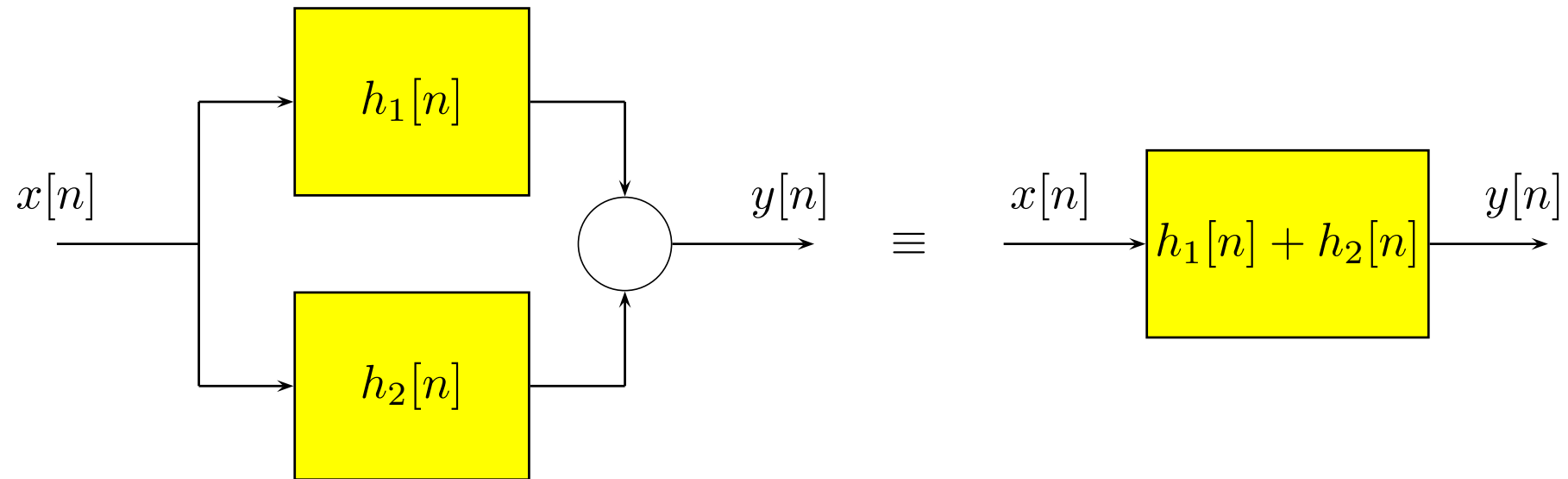


Figura 49: A convolução é distributiva.

Estabilidade

BIBO : Entrada limitada $\Rightarrow$ Saída limitada

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

Se $x[n]$ é limitado,

$$|x[n]| \leq B_x$$

então

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Portanto, $y[n]$ é limitado se

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Condição suficiente

É possível mostrar que é condição necessária .



BIBO estabilidade



$h[n]$ é absolutamente somável

Causalidade

Para SDLITs a causalidade implica que

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

Exemplo 16

Backward difference :

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

Resposta ao pulso : $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1] \Rightarrow$ Causal

Forward difference :

$$y[n] = x[n + 1] - x[n]$$

Resposta ao pulso : $h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n] \Rightarrow$ Não causal

9.7 Equações a diferenças (ED)

Uma classe importante de SDLITs é a que satisfaz uma equação a diferenças da forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] .$$

Exemplo 17

Acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

O acumulador pode ser expresso como :

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Recorrência

Diagrama de blocos

(...)

Exemplo 18

Média móvel

Para $M_1 = 0$:

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k]$$

★ É uma ED com $N = 0$.

Outra forma para o algoritmo :

$$\begin{aligned}y[n] - y[n-1] &= \frac{1}{M_2 + 1} \left(\sum_{k=0}^{M_2} x[n-k] - \sum_{k=1}^{M_2+1} x[n-k] \right) \\&= \frac{1}{M_2 + 1} \left(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2] - \right. \\&\quad \left. - x[n-1] - \cdots - x[n-M_2] - x[n-M_2-1] \right) \\&= \frac{1}{M_2 + 1} \left(x[n] - x[n-M_2-1] \right)\end{aligned}$$

★ De fato, pode-se escrever o sistema de infinitas maneiras.

★ Existem infinitos modelos de estado para a ED !

Fato. A linearidade, invariância e causalidade dependem das condições iniciais.

Se as condições iniciais forem nulas

então o sistema é linear, invariante e causal .

9.8 Representação no domínio da frequência

- ★ Já vimos a representação de um sinal em termos de impulsos.
- ★ Sinais podem ser representados de diversas formas.
- ★ Nesta seção : representação usando exponenciais complexas .

Fato. A resposta de um SLIT a uma senóide é uma senóide de mesma frequência com amplitude e fase determinadas pelo sistema .

Um SLIT não altera a frequência.

★ Seqüências exponenciais complexas são autofunções de SLITs.

Prova.

Seqüência de entrada :

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

Resposta de um SDLIT (com resposta ao pulso $h[n]$) :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right)}_{H(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

★ $e^{j\omega n}$ é uma autofunções do sistema associada ao autovalor $H(e^{j\omega})$.

Definindo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

★ $H(e^{j\omega})$ é denominada resposta em frequência .

★ $H(e^{j\omega})$ é uma função complexa contínua em ω .

Exemplo 19

Atraso ideal

$$y[n] = x[n - n_d]$$

Seqüência de entrada :

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

Resposta :

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)}$$

$$= \underbrace{e^{-j\omega n_d}}_{H(e^{j\omega})} e^{j\omega n} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

Solução alternativa :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d]e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega n_d} \end{aligned}$$

Importante

Uma classe bastante ampla de sinais de interesse pode ser expressa como

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e^{j\omega_i n}$$

Expansão em série de Fourier

Então, se $x[n]$ é a seqüência de entrada de um SDLIT, a saída é :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e^{j\omega_i(n-k)} \right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_i k} \right)}_{H(e^{j\omega_i})} e^{j\omega_i n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i H(e^{j\omega_i}) e^{j\omega_i n}}$$

Fato. A resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ é uma **função periódica** com período 2π .

Prova.

$$\begin{aligned} H(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_1 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \\ &= H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

★ Por conveniência, é usual especificar $H(e^{j\omega})$ somente para $\omega \in (-\pi, \pi]$.

Exemplo 20

Média móvel

Algoritmo da média móvel :

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Resposta ao pulso unitário :

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & \text{se } -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta em frequência :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

Fórmula : Soma de uma PG

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}, \quad N_2 \geq N_1.$$

★ Fórmula útil para encontra **formas fechadas**.

Fórmula : Euler

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$$

Portanto :

$$2 \cos(\omega) = e^{j\omega} + e^{-j\omega}$$

$$2j \sin(\omega) = e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

Aplicando a fórmula da soma de PGs :

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \left(\frac{e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2}}{e^{-j\omega/2}} \right) \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \left(e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \right) \frac{\sin(\omega(M_1 + M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)}
 \end{aligned}$$

Aplicando Euler :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \left(e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \right) \frac{\sin(\omega(M_1 + M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

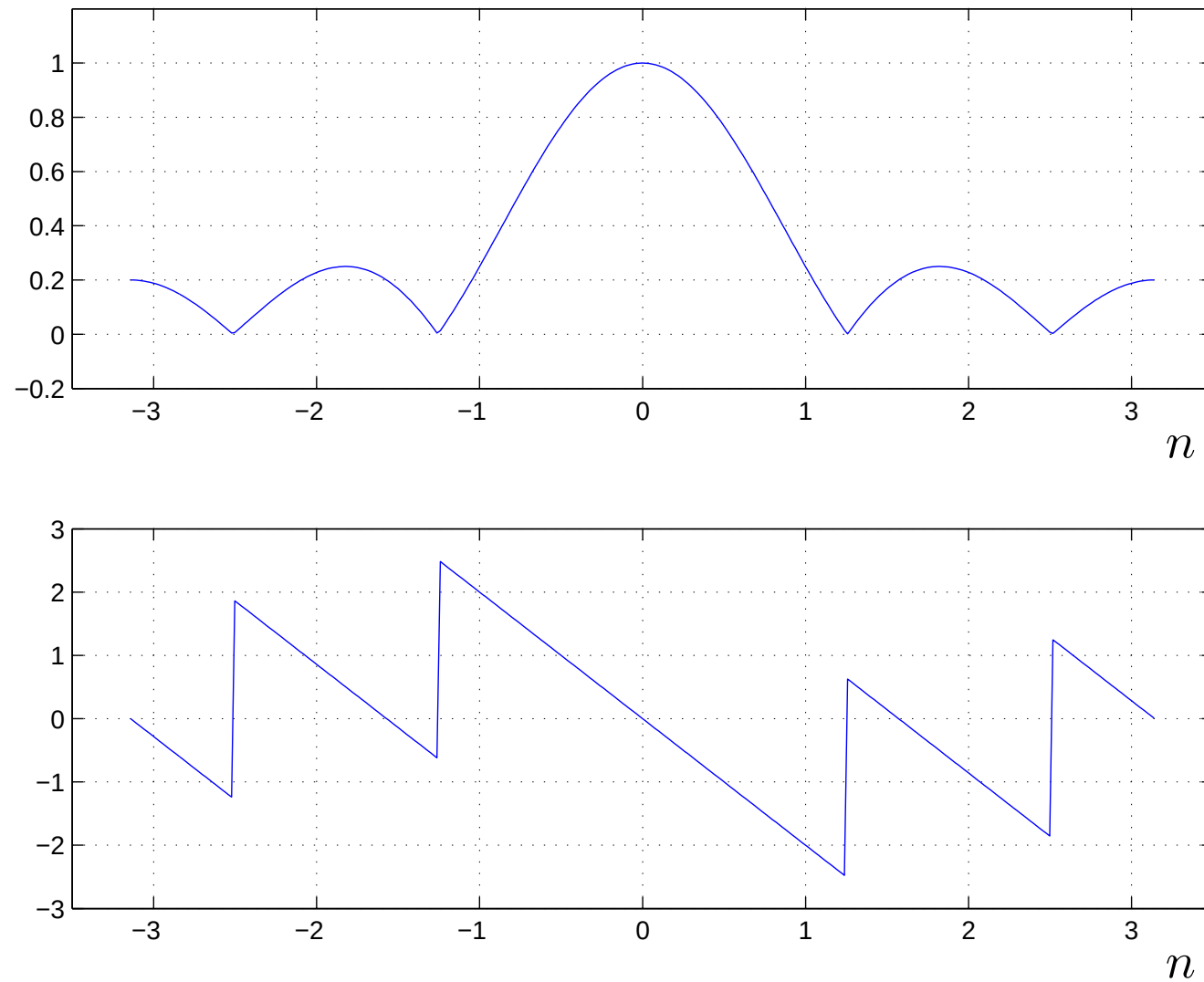


Figura 50: Resposta em frequência : módulo e fase para $M_1 = 0$, $M_2 = 4$.

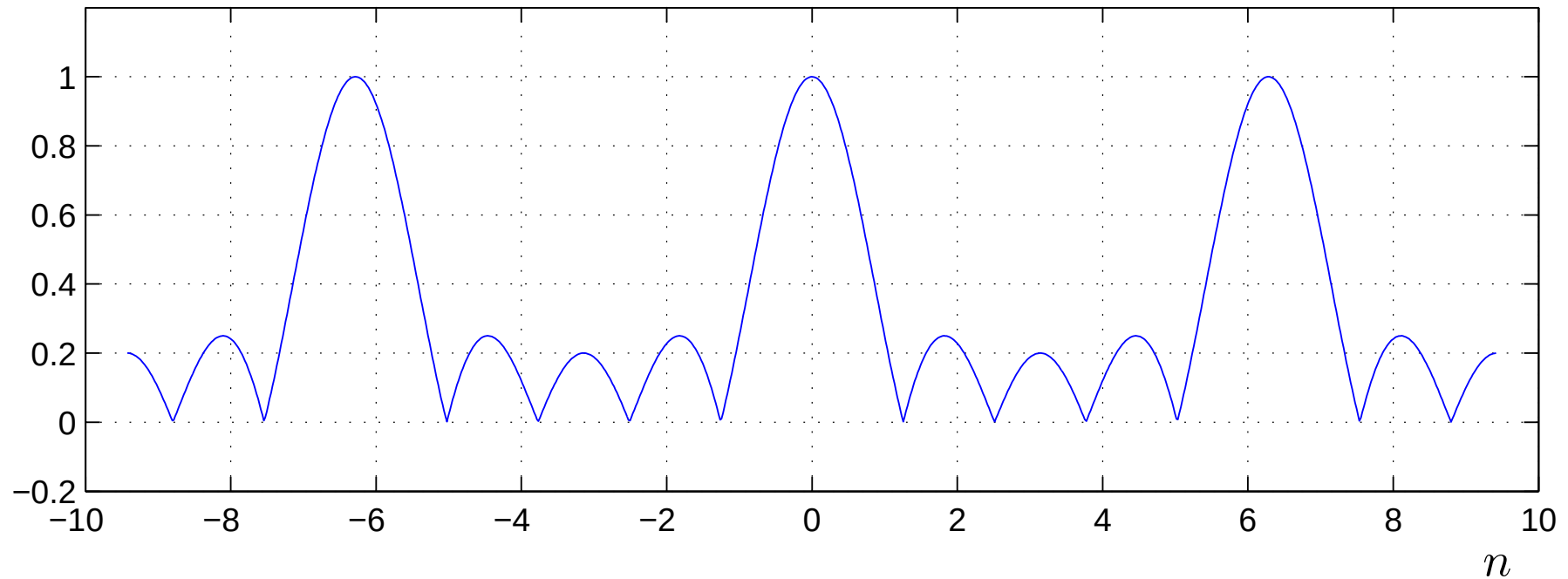


Figura 51: Periodicidade de $H(e^{j\omega})$.

Script **exemplo20.m**.

9.9 Transformada de Fourier

Equação de síntese :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Equação de análise :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

★ $X(e^{j\omega})$ é periódica com período 2π .

★ $X(e^{j\omega})$ é uma função complexa contínua da variável ω :

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

Nota. A resposta em frequência de um SLIT é simplesmente a transformada de Fourier da resposta ao impulso

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Verificação Vamos mostrar que a eq. de síntese é a inversa da eq. de análise.

Equação de análise :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}$$

Equação de síntese :

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega$$

Podemos trocar a ordem da integração e do somatório :

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right)}_{\mathcal{I}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \left(-j \frac{1}{n-m} e^{j\omega(n-m)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\&= \frac{1}{2\pi} \left(-j \frac{1}{n-m} \right) \left(e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)} \right) \\&= \frac{-j}{2\pi(n-m)} \left[2j \sin(\pi(n-m)) \right] \\&= \frac{\sin(\pi(n-m))}{\pi(n-m)} \\&= \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} = \delta[n-m]\end{aligned}$$

Portanto :

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathcal{I} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n - m] \\ &= x[n]\end{aligned}$$

★ Se $x[n]$ é absolutamente somável $\Rightarrow \boxed{\exists X(e^{j\omega})}$.

Importante

- ★ Seqüências **FIR** são estáveis e absolutamente somáveis.
- ★ Quando a seqüências é **IIR**, deve-se verificar sua convergência.

Notação : **FIR** : *Finite Impulse Response*
IIR : *Infinite Impulse Response*

Exemplo 21

Seqüência exponencial

$$x[n] = a^n u[n]$$

Transformada de Fourier :

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega} \right)^n \end{aligned}$$

★ $X(e^{j\omega})$ é convergente para

$$|a e^{-j\omega}| < 1$$

 $\Rightarrow$

$$|a| < 1$$

.

Forma fechada :

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{(a e^{-j\omega})^0 - (a e^{-j\omega})^\infty}{1 - (a e^{-j\omega})} \\ &= \frac{1 - 0}{1 - a e^{-j\omega}} \end{aligned}$$



$$|a| < 1$$

 $\Rightarrow$

$$(a e^{-j\omega})^\infty = 0$$

Portanto :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Importante

- ★ Se $x[n]$ não for absolutamente somável, então $\nexists X(e^{j\omega})$.
- ★ 2 seqüências podem ter a mesma transformada $X(e^{j\omega})$!

Nota. Algumas seqüências não são absolutamente somáveis, porém são quadraticamente somáveis :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

★ Seqüências quadraticamente somáveis podem ser representadas por uma transformada de Fourier.

Exemplo 22

Filtro passa-baixa ideal

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{se } \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Resposta ao pulso :

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

(não causal!)

- ★ $h[n]$ não é uma PG!
- ★ $h[n]$ não é absolutamente somável.
- ★ Porém, $h[n]$ é quadraticamente somável.

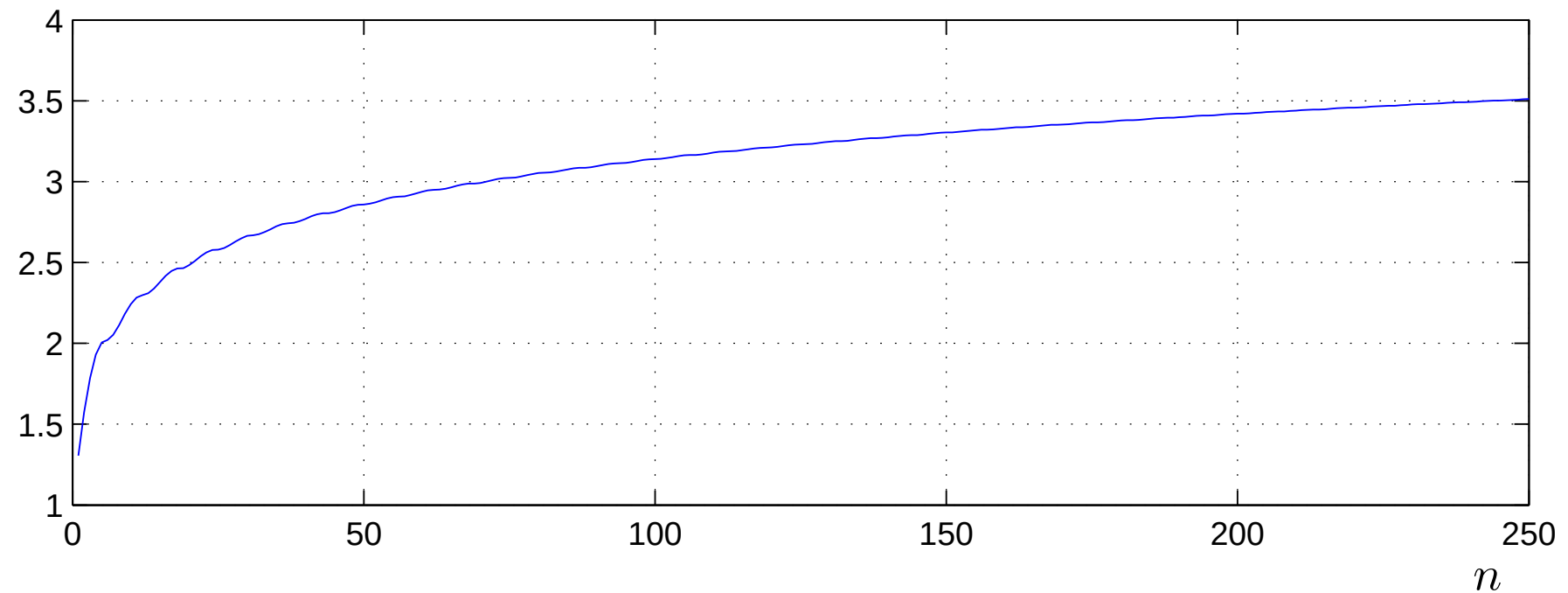


Figura 52: Verificação : $h[n]$ não é absolutamente somável.

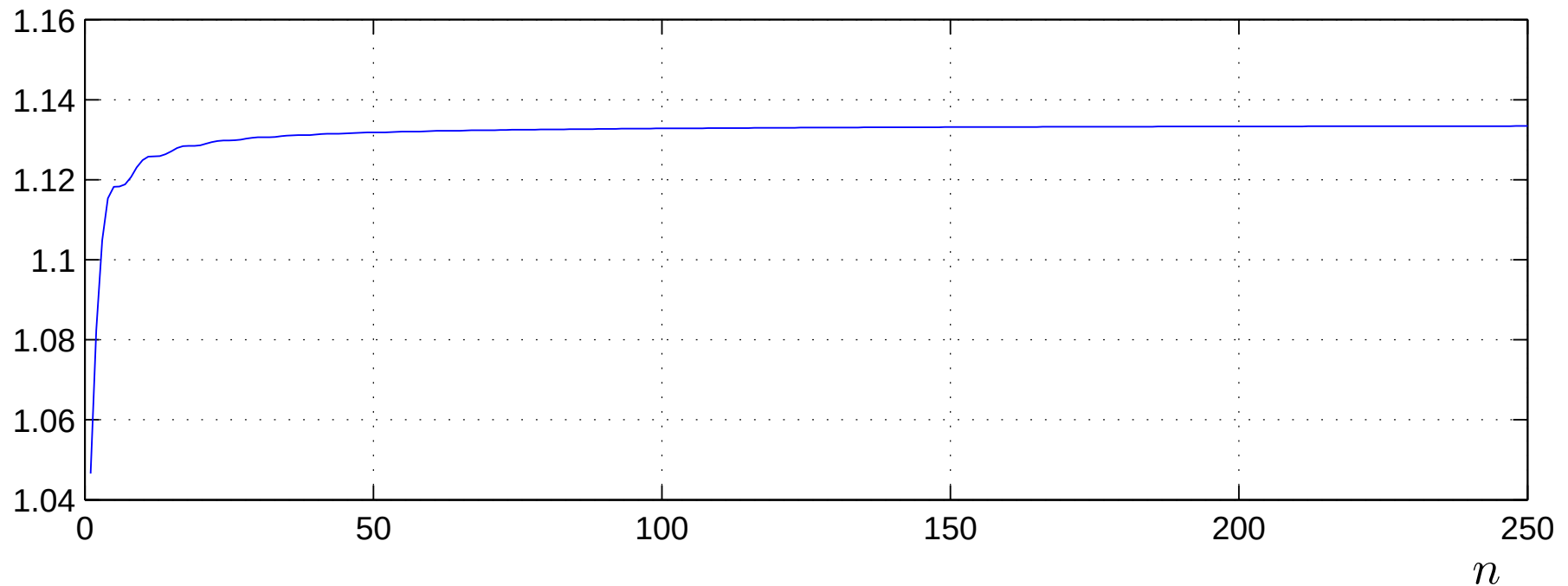


Figura 53: Verificação : $h[n]$ é quadraticamente somável.

Script **exemplo22.m** .

Seja a seqüência

$$\boxed{x[n] = 1}, \quad \forall n$$

Esta seqüência não é absolutamente somável nem quadraticamente somável.

Por definição :

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi r)}$$

★ $\delta(\omega + 2\pi r)$ é a função impulso contínua com amplitude infinito e área 1.

Exemplo 23 Seja a seqüência $x[n]$ tal que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

(Trem de impulsos)

Anti-transformada :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \right) e^{j\omega n} d\omega$$

(1 período !)

$$= e^{j\omega_0 n}$$

A definição é consistente :

$$\omega_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x[n] = 1$$

, $\forall n$.

9.10 Propriedades da transformada de Fourier

Definição. (*Seqüência conjugada-simétrica*)

Uma seqüência $x_e[n]$ é dita **conjugada-simétrica** se

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

Exemplo 24 Sequência complexa

$$x_e[n] = \cdots a - jb, \underline{z}, a + jb, \cdots$$

$$x_e^*[n] = \cdots a + jb, \underline{z}, a - jb, \cdots$$

$$x_e^*[-n] = \cdots a - jb, \underline{z}, a + jb, \cdots$$

$$\Rightarrow x_e[n] = x_e^*[-n]$$

Exemplo 25 Sequência real

$$x_e[n] = \cdots 1, 1, \underline{z}, 1, 1, \cdots$$

Definição. (*Seqüência conjugada-antisimétrica*)

Uma seqüência $x_o[n]$ é dita **conjugada-antisimétrica** se

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

Exemplo 26 Seqüência complexa

$$x_o[n] = \cdots -a + jb, \underline{0}, a + jb, \cdots$$

$$x_o[-n] = \cdots a + jb, \underline{0}, -a + jb, \cdots$$

$$x_o^*[-n] = \cdots a - jb, \underline{0}, -a - jb, \cdots$$

$$-x_o^*[-n] = \cdots -a + jb, \underline{0}, a + jb, \cdots$$

$$\Rightarrow x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

Exemplo 27 Sequência real

$$x_o[n] = \cdots -1, -1, \underline{0}, 1, 1, \cdots$$

Fato. Toda seqüência pode ser expressa como :

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

onde :

$$\text{Parte conjugada-simétrica} \quad : \quad x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n])$$

$$\text{Parte conjugada-antisimétrica} \quad : \quad x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n])$$

Exemplo 28

Degrau unitário

$$u[n] = \cdots 0, 0, \underline{1}, 1, 1, \cdots$$

$$u_e[n] = \cdots 0.5, 0.5, \underline{1}, 0.5, 0.5, \cdots$$

$$u_o[n] = \cdots -0.5, -0.5, \underline{0}, 0.5, 0.5, \cdots$$

Definição. (*Seqüência simétrica*)

Uma seqüência real $x_e[n]$ é dita **simétrica** se

$$x_e[n] = x_e[-n]$$

★ Também é denominada de **seqüência par** (“even”).

Definição. (*Seqüência antisimétrica*)

Uma seqüência real $x_o[n]$ é dita **antisimétrica** se

$$x_o[n] = -x_o[-n]$$

★ Também é denominada de **seqüência impar** (“odd”).

Fato. Toda transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ pode ser decomposta como :

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

onde :

$$\text{Parte conjugada-simétrica} : X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

$$\text{Parte conjugada-antisimétrica} : X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

Propriedades :

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(-e^{j\omega})$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(-e^{j\omega})$$

★ As propriedades de simetria da Transformada de Fourier estão resumidas na Tabela 2.1,

(Oppenheim & Schafer 1989), pag. 53.

Notação :

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

	Seqüência	Trans. Fourier
1	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3	$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$
4	$\text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$
5	$x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
6	$x_o[n]$	$j X_I(e^{j\omega})$

	Seqüência real	Trans. Fourier
7	$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8	$x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9	$x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10	$x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11	$x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
12	$x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13	$x_o[n]$	$j X_I(e^{j\omega})$

Exercício. 2.29, (Oppenheim & Schafer 1989), pag. 75.

Provar as propriedades 1 e 2 da Tabela 2.1.

(a) Propriedades 1 :

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(e^{-j\omega})$$

Seja :

$$x[n] = a[n] + j b[n]$$

$\Rightarrow$

$$x^*[n] = a[n] - j b[n]$$

Notação:

$f(x) \Big|_{x \rightarrow y}$ significa $f(x)$ com x substituído por y .

Então :

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a[n] + j b[n]) e^{-j\omega n}$$

$$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Big|_{j \rightarrow -j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a[n] - j b[n]) e^{j\omega n}$$

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a[n] - j b[n]) e^{-j\omega n}$$

Portanto :

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega \rightarrow -\omega} = X^*(e^{-j\omega})$$

(b) Propriedades 2 :

$$\mathcal{F}\{x^*[-n]\} = X^*(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a[n] - j b[n]) e^{-j\omega n} = X^*(e^{-j\omega})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x^*[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a[-n] - j b[-n]) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=\infty}^{-\infty} (a[n] - j b[n]) e^{j\omega n} = X^*(e^{-j\omega}) \Big|_{\omega \rightarrow -\omega} = X^*(e^{j\omega})\end{aligned}$$

Exercício.

Provar as demais propriedades.

Exercício.

Verificar as propriedades 7 a 11 para a seqüência

$$x[n] = a^n u[n] .$$

9.11 Teoremas da transformada de *Fourier*

Notação :

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

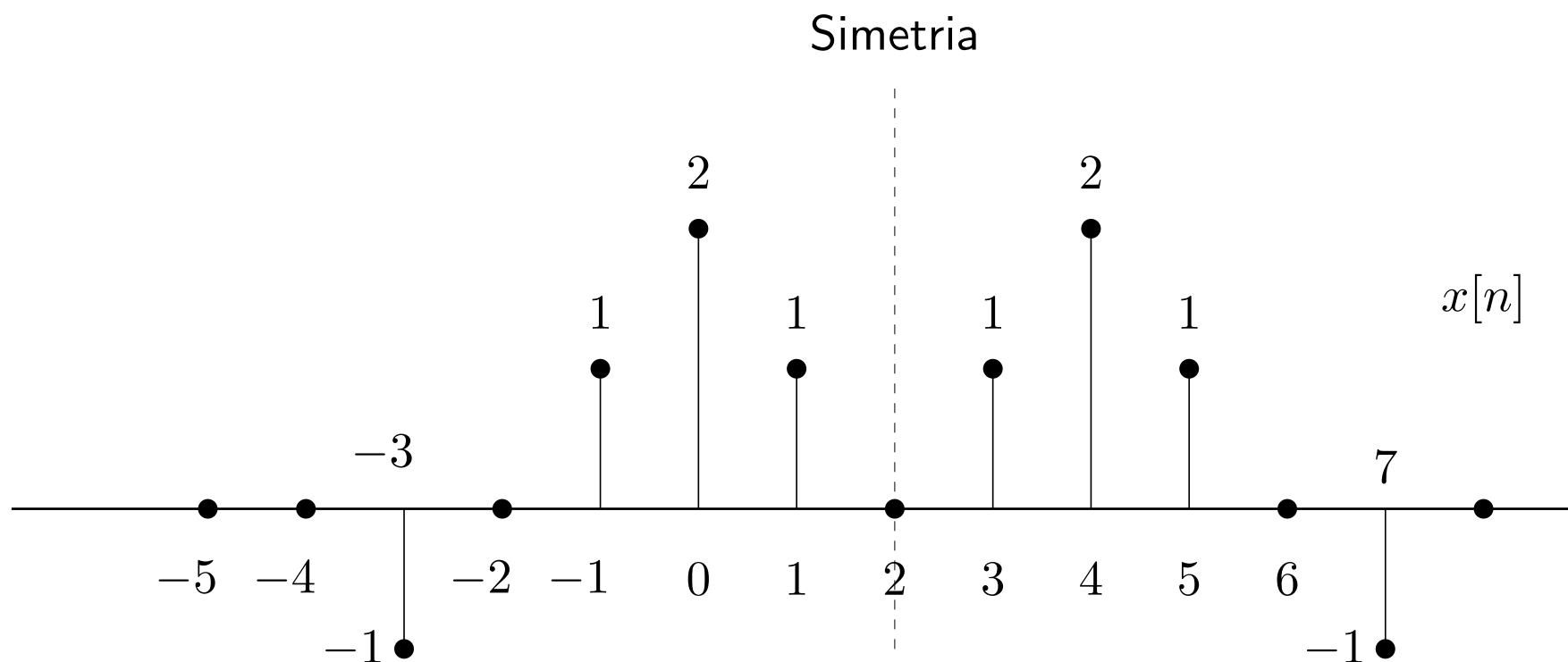
Os teoremas estão resumidos na Tabela 2.2.

	Seqüência	Trans. Fourier
1	$a x[n] + b y[n]$	$a X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega})$
2	$x[n - n_d], \quad (n_d \in \mathbb{N})$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5	$n x[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
7	$x[n] y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$

Teorema de Parseval	
1	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
2	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

Exercício. 2.35, (Oppenheim & Schafer 1989), pag. 76.

Seja a seqüência $x[n]$ abaixo



(a) Determine $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}$ sem calcular explicitamente $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$.

Seja

$$y[n] = x[n+2]$$

Note que $y[n]$ é simétrica.

Pelo Teorema 2 da tabela 2.2 :

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{y[n]\} \\ &= e^{-j\omega(-2)} X(e^{j\omega}) = e^{j2\omega} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Como $y[n]$ é real e simétrica (EVEN), pela propriedade 12 da Tabela 2.1 :

$$Y(e^{j\omega}) = Y_R(e^{j\omega})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Y_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \left(\cos(\omega n) - j \sin(\omega n) \right) \end{aligned}$$

Como :

$$\cos(-\omega n) = \cos(\omega n)$$

e

$$\sin(-\omega n) = -\sin(\omega n)$$

Então,

$$Y_R(e^{j\omega}) = y[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} y[n] \cos(\omega n)$$

Resultado Para seqüências reais e simétricas (EVEN) :

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \cos(\omega n)$$

Voltando ao exercícios :

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) = Y_R(e^{j\omega}) &= y[0] + 2 \sum_{n=1}^5 y[n] \cos(\omega n) \\ &= 2 \left(\cos(\omega) + 2 \cos(2\omega) + \cos(3\omega) - \cos(5\omega) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Então : } X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = e^{-j2\omega} Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0}$$

$$= 2(1 + 2 + 1 - 1) \Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 6}$$

(b) Determine $\angle X(e^{j\omega})$ sem calcular explicitamente $X(e^{j\omega})$.

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \underbrace{Y_R(e^{j\omega})}_{\text{Real!}} = Y_R(e^{j\omega}) \big|_{-2\omega}$$

Portanto :

$$\angle X(e^{j\omega}) = -2\omega$$

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 10

10 Amostragem de sinais contínuos

Conteúdo

1. Introdução
2. Representação no domínio da frequência
3. Reconstrução de sinais

10.1 Introdução

- ★ Sinais discretos aparecem em muitas situações práticas.
- ★ Situação mais comum : amostragem de sinais contínuos .
- ★ O processamento de sinais contínuos pode ser implementado fazendo-se
 - amostragem
 - processamento discreto das seqüências e
 - reconstrução do sinal contínuo processado.
- ★ Sob certas condições, um sinal contínuo pode ser adequadamente representado por suas amostras.

Histórico

Nyquist (1928) : Observou que era possível reconstruir uma senóide a partir de suas amostras se a frequência de amostragem fosse maior do que 2 vezes a frequência do sinal.

Shannon (1949) : Formalizou o resultado (apresentado nesse capítulo).

Kotelnikov (1933) : Introduziu o resultado na literatura Soviética.

10.2 Amostragem

★ Método mais usual : amostragem periódica .

Seqüência amostrada :

$$x[n] = x_c(nT)$$

T intervalo de amostragem

$f_s = \frac{1}{T}$ freqüência de amostragem

$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ freqüência angular de amostragem

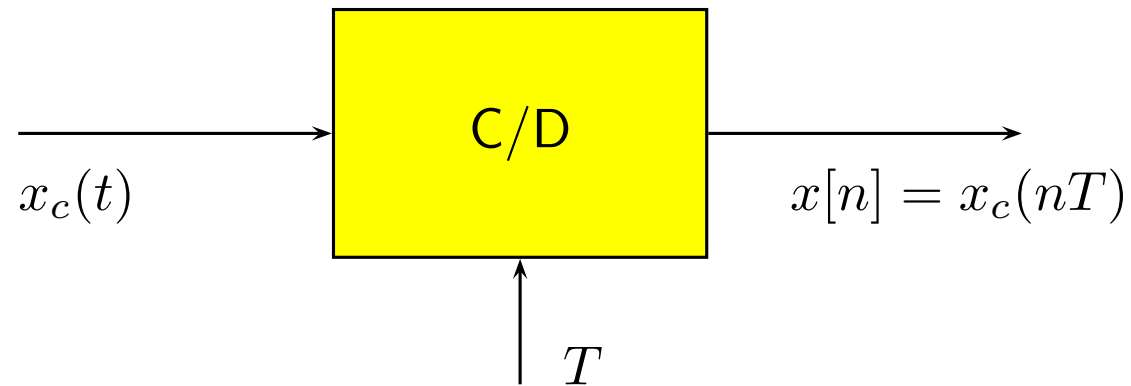


Figura 54: Conversor Contínuo/Discreto ideal .

Modelagem matemática

★ É conveniente separar o processo de amostragem em 2 etapas:

- Modulador por trem de impulsos
- Conversor de trem de impulsos para seqüências

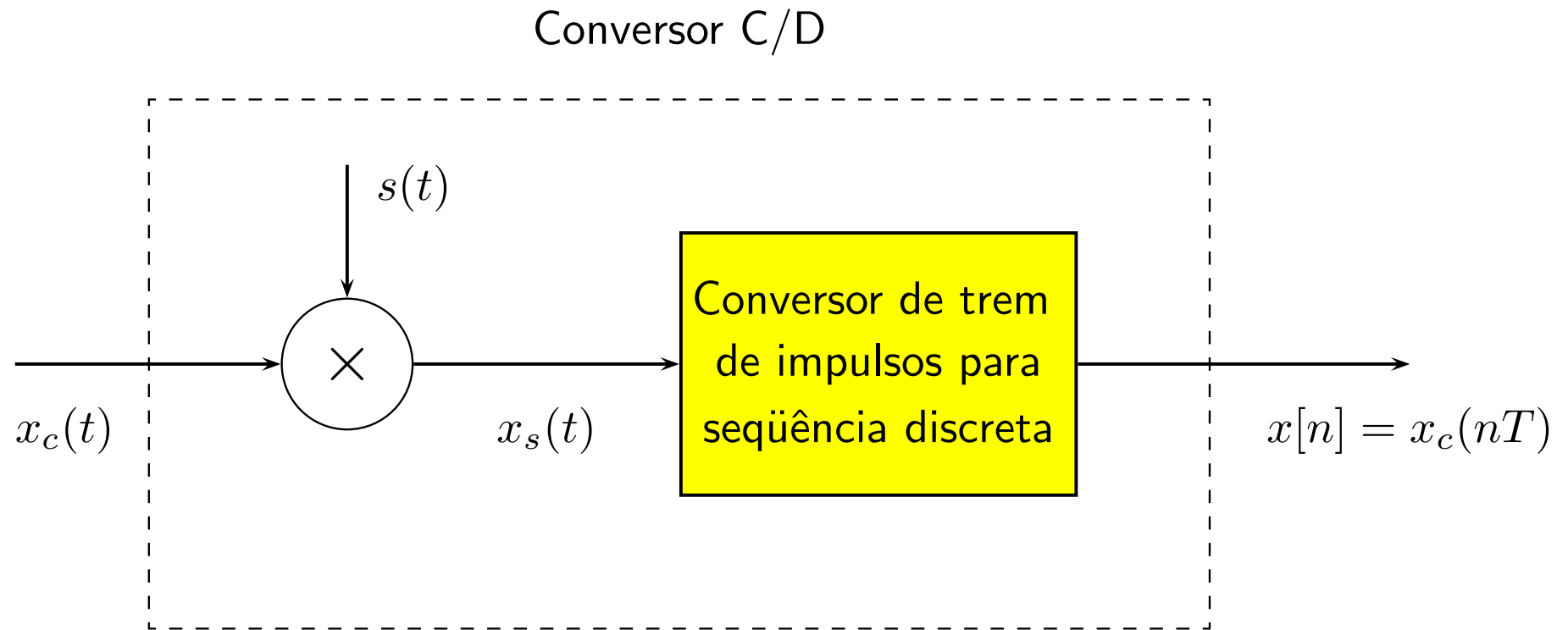


Figura 55: Representação : Modulador + conversor.

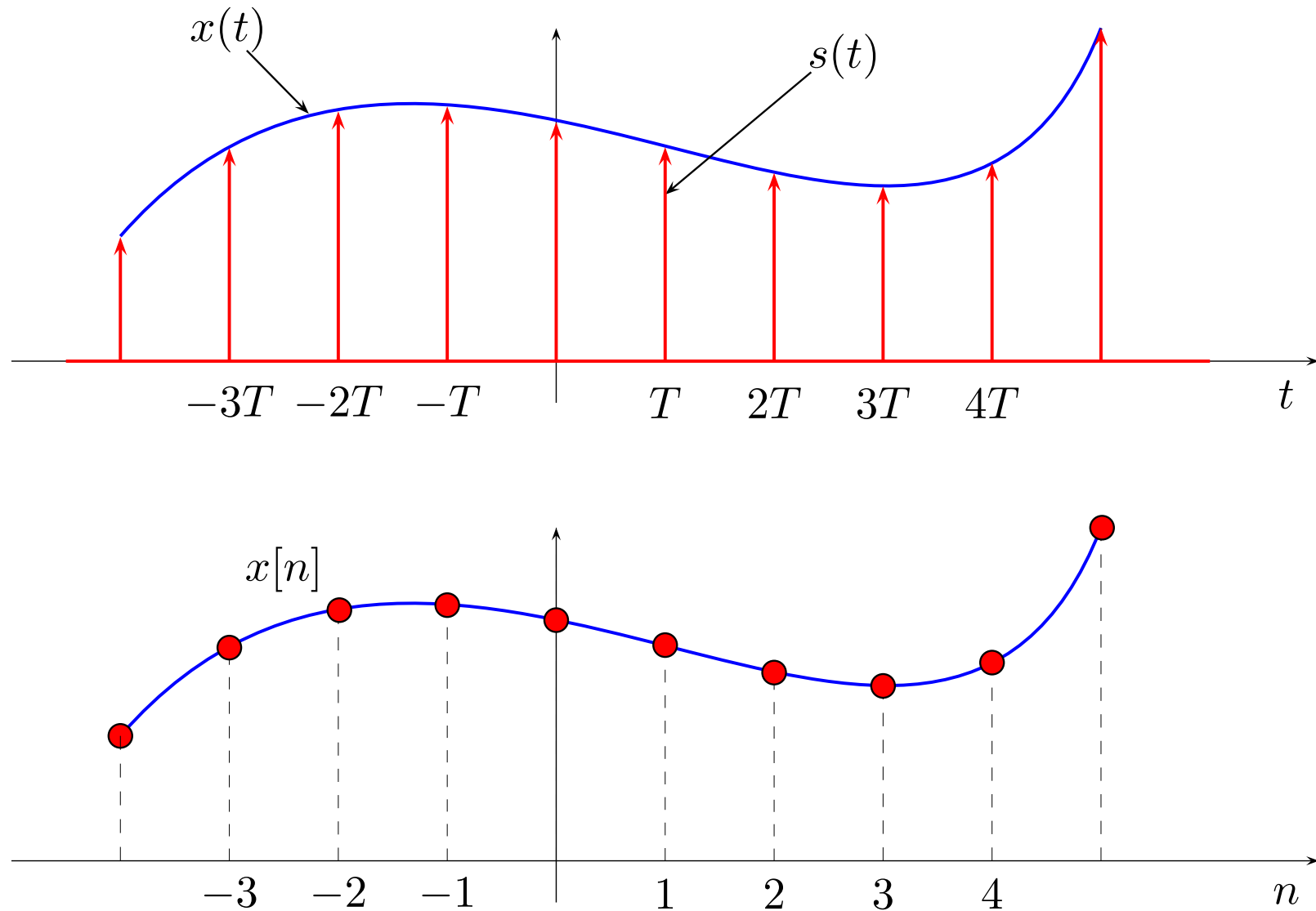


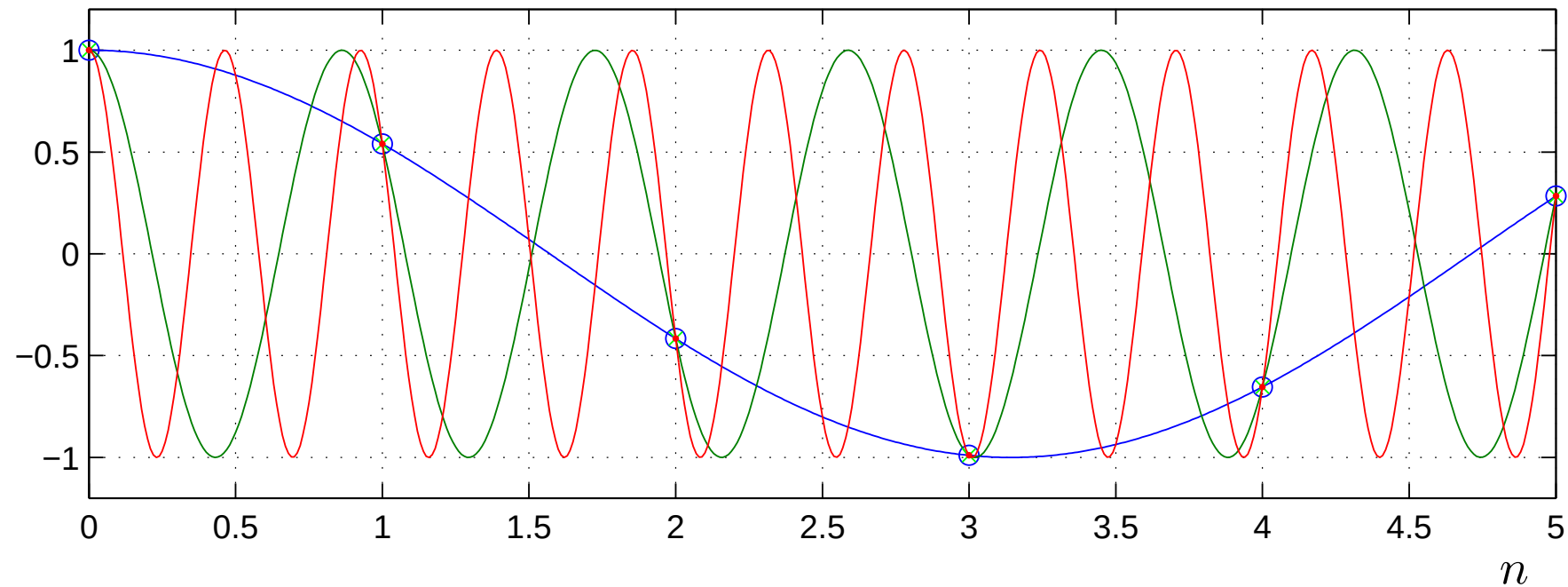
Figura 56: Modulação e amostragem usando 2 intervalos diferentes.

- ★ A saída do modulador $x_s(t)$ é um trem de impulsos (sinal contínuo).
- ★ A saída do conversor $x[n]$ é uma seqüência (sinal discreto).
- ★ Essa representação matemática da operação de amostragem permite obter de maneira mais simples alguns resultados.

Reconstrução

★ Em geral, não é possível reconstruir o sinal contínuo a partir de suas amostras.

Problema : Muitos sinais contínuos produzem as mesmas seqüências de amostragem.

Exemplo 1Figura 57: *Aliasing*.Script **exemplo01.m**.

Solução

Para se eliminar essa ambigüidade é necessário restringir a classe de sinais no amostrador.

★ O sinal contínuo a ser amostrado deve ter banda limitada .

10.3 Representação no domínio da frequência

Para derivar a representação no domínio da frequência do conversor C/D ideal, vamos inicialmente considerar a **modulação por trem de impulsos** de $x_c(t)$.

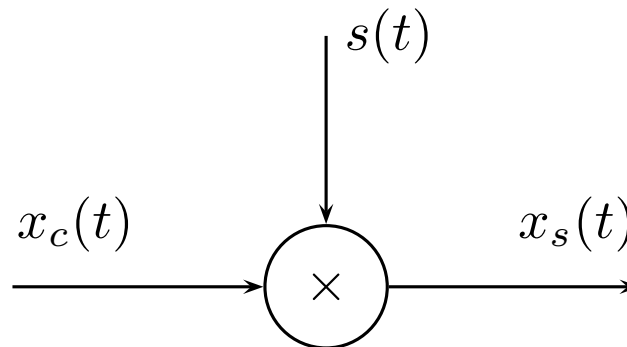


Figura 58: Modulação por trem de impulsos.

Trem de impulsos :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Sinal modulado :

$$\begin{aligned}x_s(t) &= x_c(t) s(t) \\&= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\end{aligned}$$

Usando propriedade da função impulso (Delta de Dirac) :

$$\begin{aligned}x_s(t) &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)\end{aligned}$$

★ $s(t)$ é um sinal periódico com frequência $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Transformada de Fourier de $s(t)$:

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

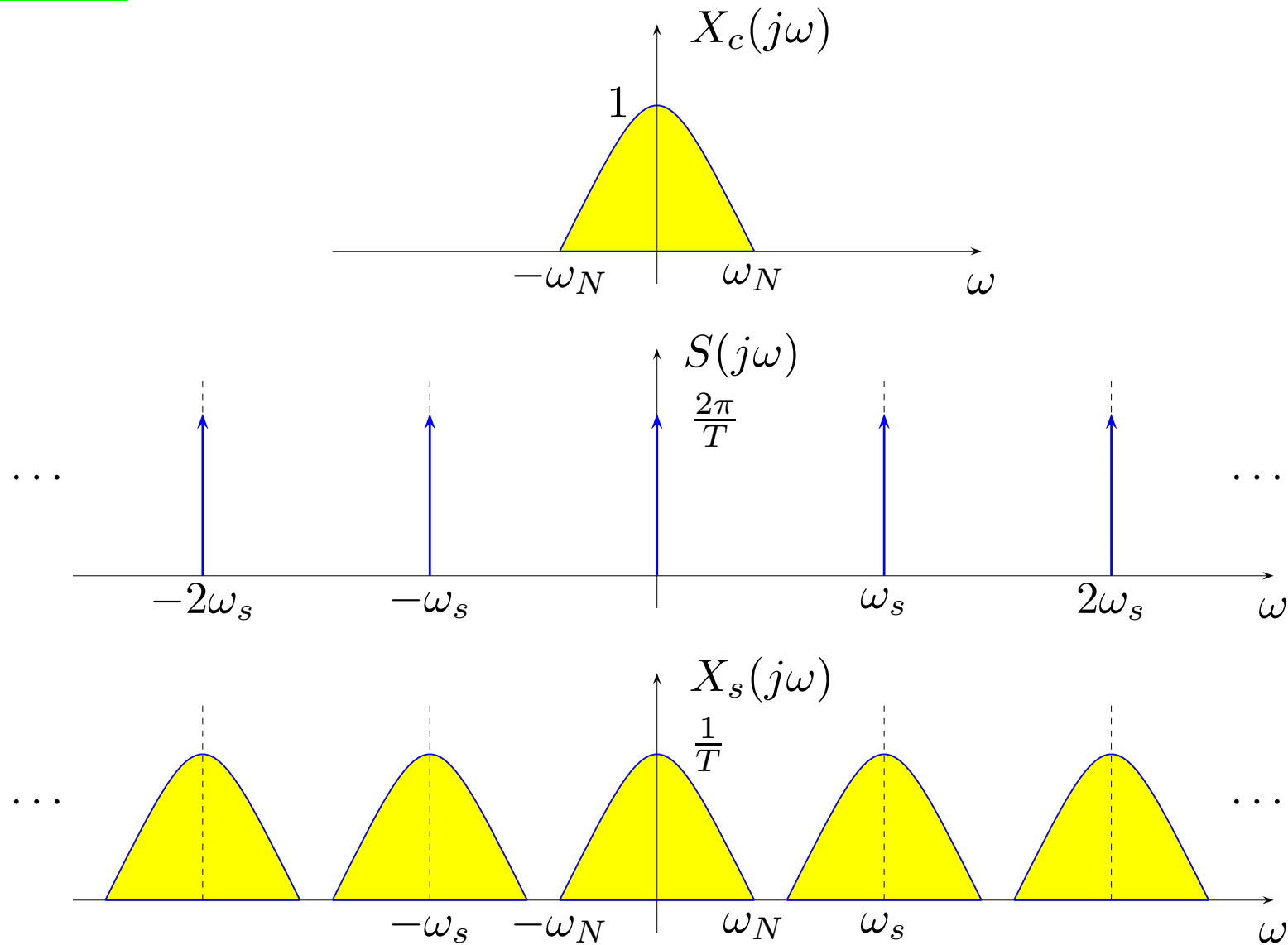
Portanto,

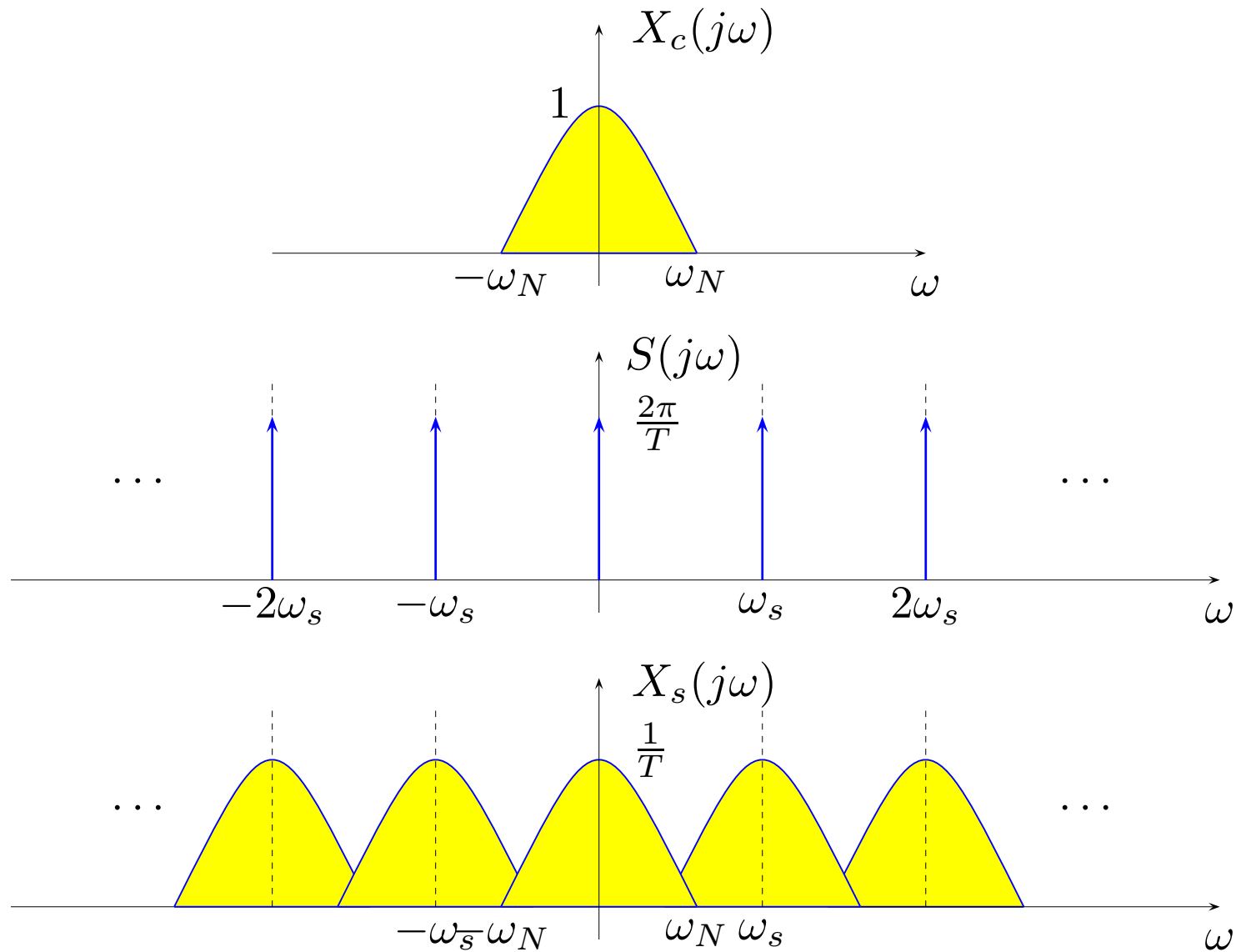
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * S(j\omega)$$

ou melhor,

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} X_c(j\omega - kj\omega_s)$$

Interpretação





10.4 Reconstrução de sinais

Problema: Quando um sinal analógico é dado de maneira única pelas suas amostragens?

Teorema. *(Shannon)*

Um sinal contínuo com transformada de Fourier zero fora do intervalo $(-\omega_0, \omega_0)$ é dado unicamente pelos seus valores em instantes eqüidistantes se

$$\omega_s > 2\omega_0$$

Fórmula de reconstrução

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_s}{2} (t - kT) \right)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



$$\omega_s = 2\pi f_s$$

,

$$f_s = \frac{1}{T}$$



$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

= Freqüência de Nyquist .



Fórmula não causal .

Prova

...

Métodos de reconstrução

- ZOH
- FOH preditivo
- Fórmula de Shannon

ZOH

É o método de reconstrução mais simples.

$$f(t) = f(k)$$



Figura 59: Reconstrução FOH.

FOH

Fórmula de reconstrução FOH :

$$f(t) = f(k) + \frac{t - kh}{h} \left(f(k) - f(k - 1) \right)$$

Desvantagem: O sinal reconstituído é descontínuo.



Figura 60: Reconstrução FOH.

FOH preditivo

Fórmula de reconstrução :

$$f(t) = f(k) + \frac{t - kh}{h} \left(f(k+1) - f(k) \right)$$

Para $t = kh \rightarrow f(t) = f(k)$

Para $t = kh + h \rightarrow f(t) = f(k+1)$

Problema : Não causal.

Solução : usar predição de $f(k+1)$



Figura 61: Reconstrução FOH preditivo.

Exemplo 2 Reconstrução usando ZOH e fórmula de Shannon.

Sinal contínuo :

$$x(t) = 0.5 + 2 \sin(0.7t + 1) + \sin(1.25t + 2) + 1 \sin(3.1t + 3)$$

Maior frequência :

$$3.1 \text{ rad/s}$$

Frequência de amostragem :

$$2\pi \text{ rad/s}$$

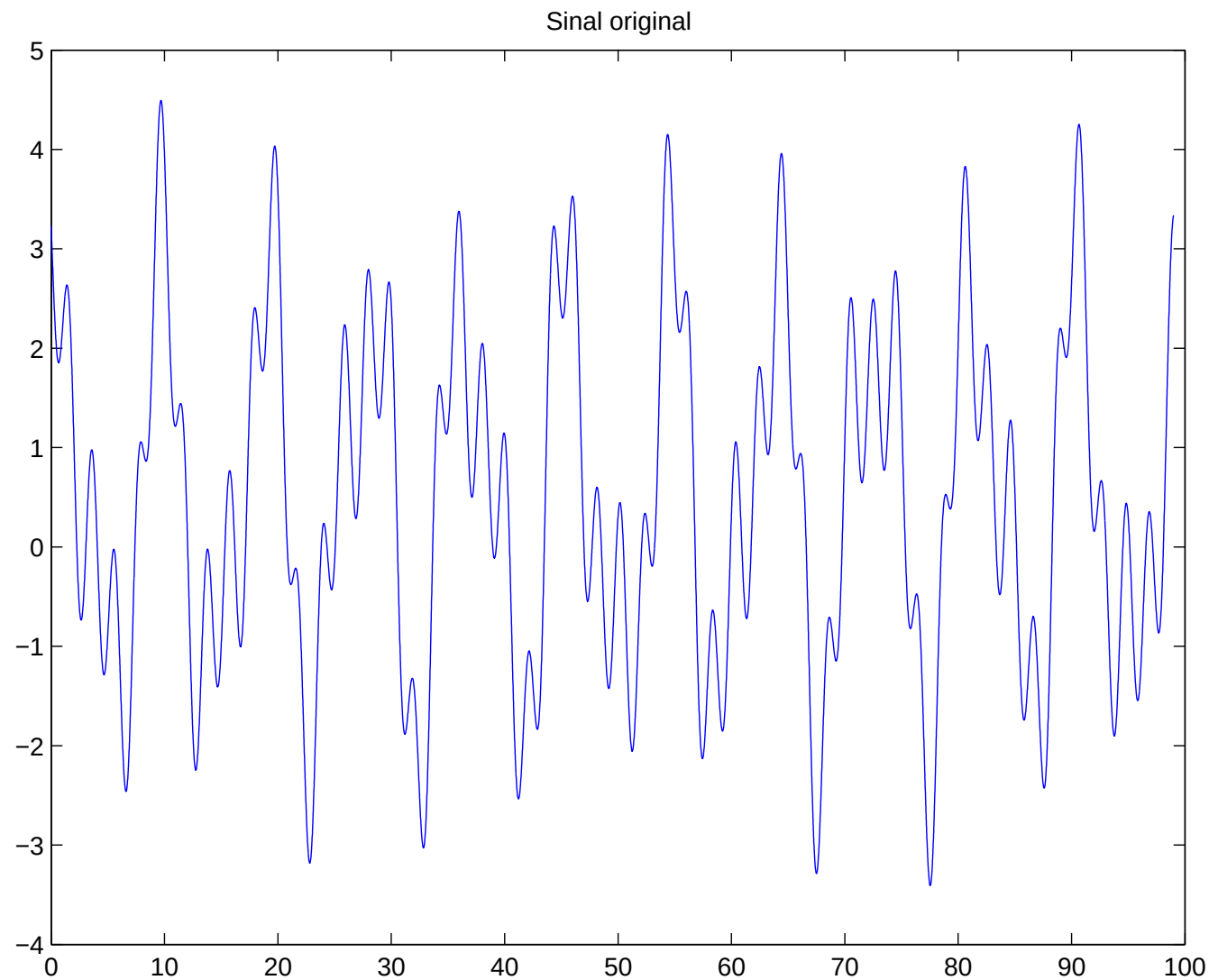


Figura 62: Sinal original.

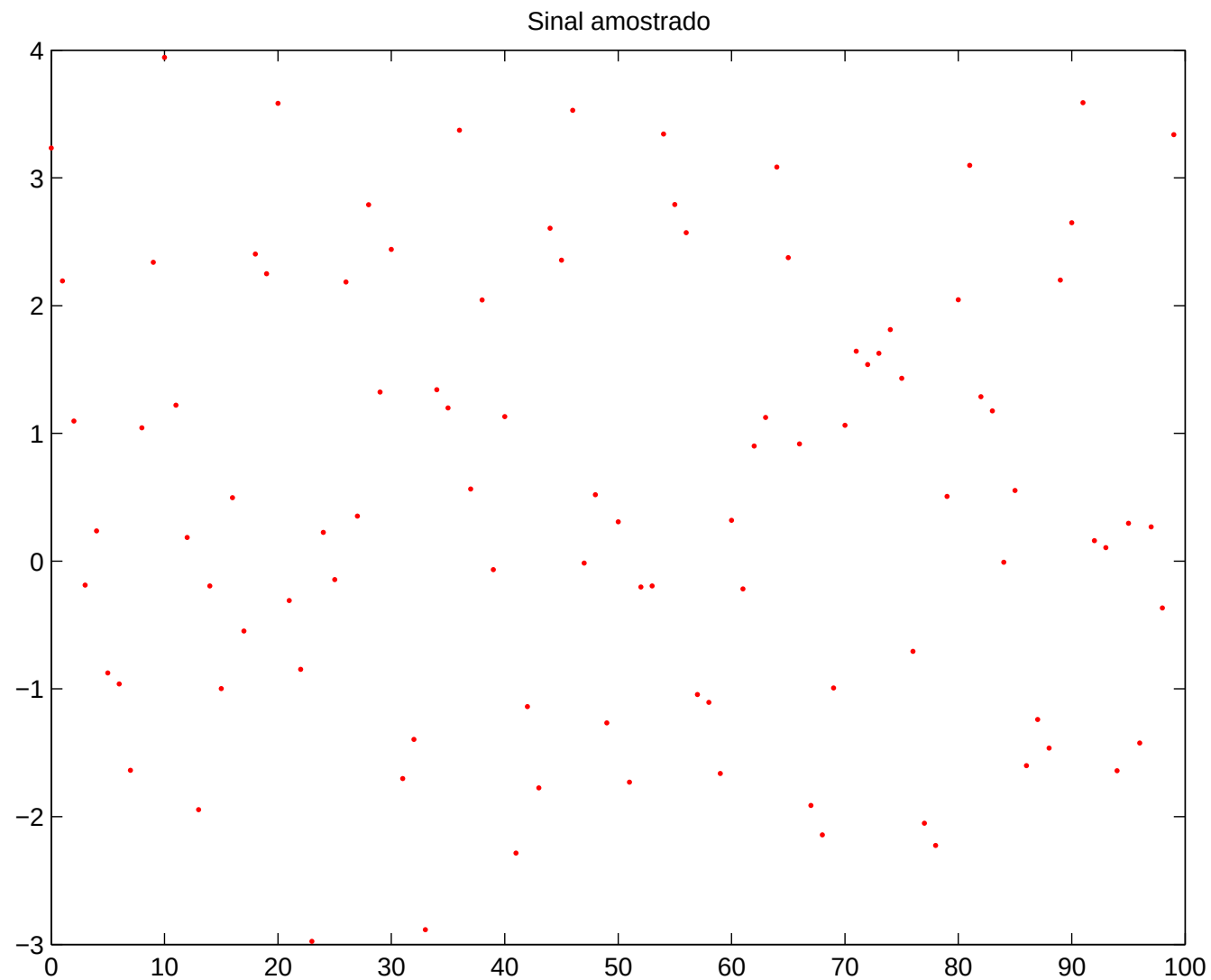


Figura 63: Sinal amostrado.

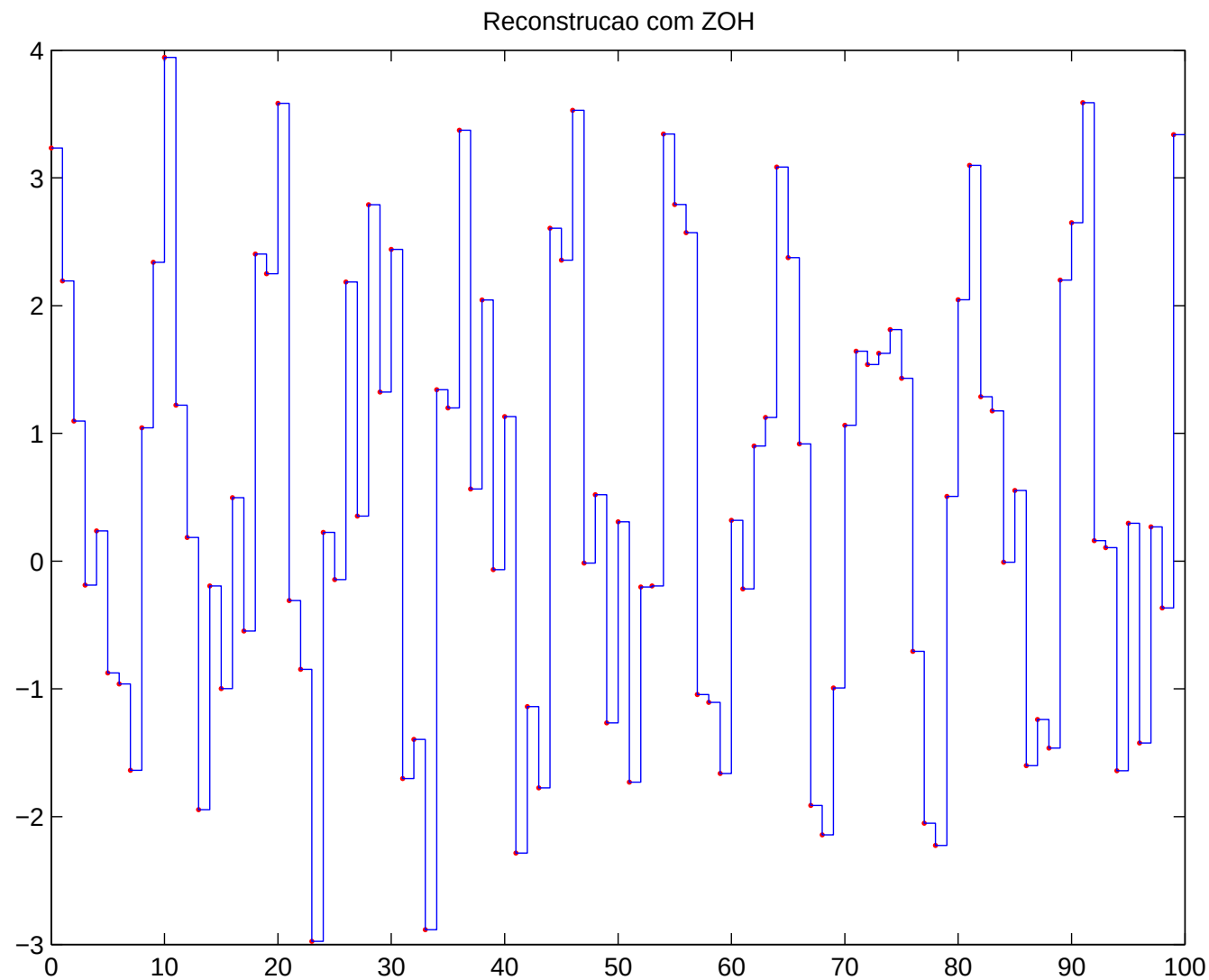


Figura 64: Reconstrução usando ZOH.

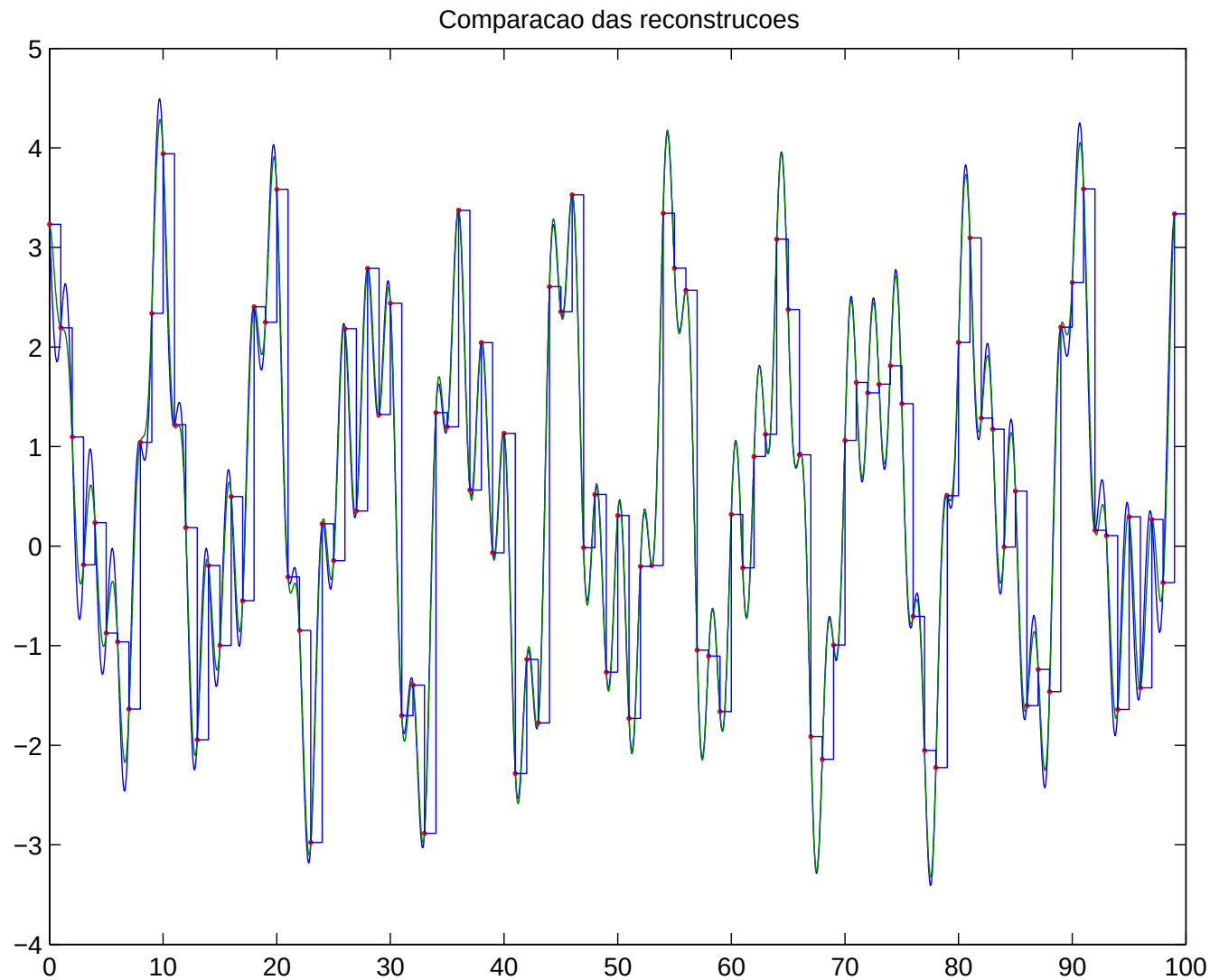


Figura 65: Reconstrução usando fórmula de Shannon.

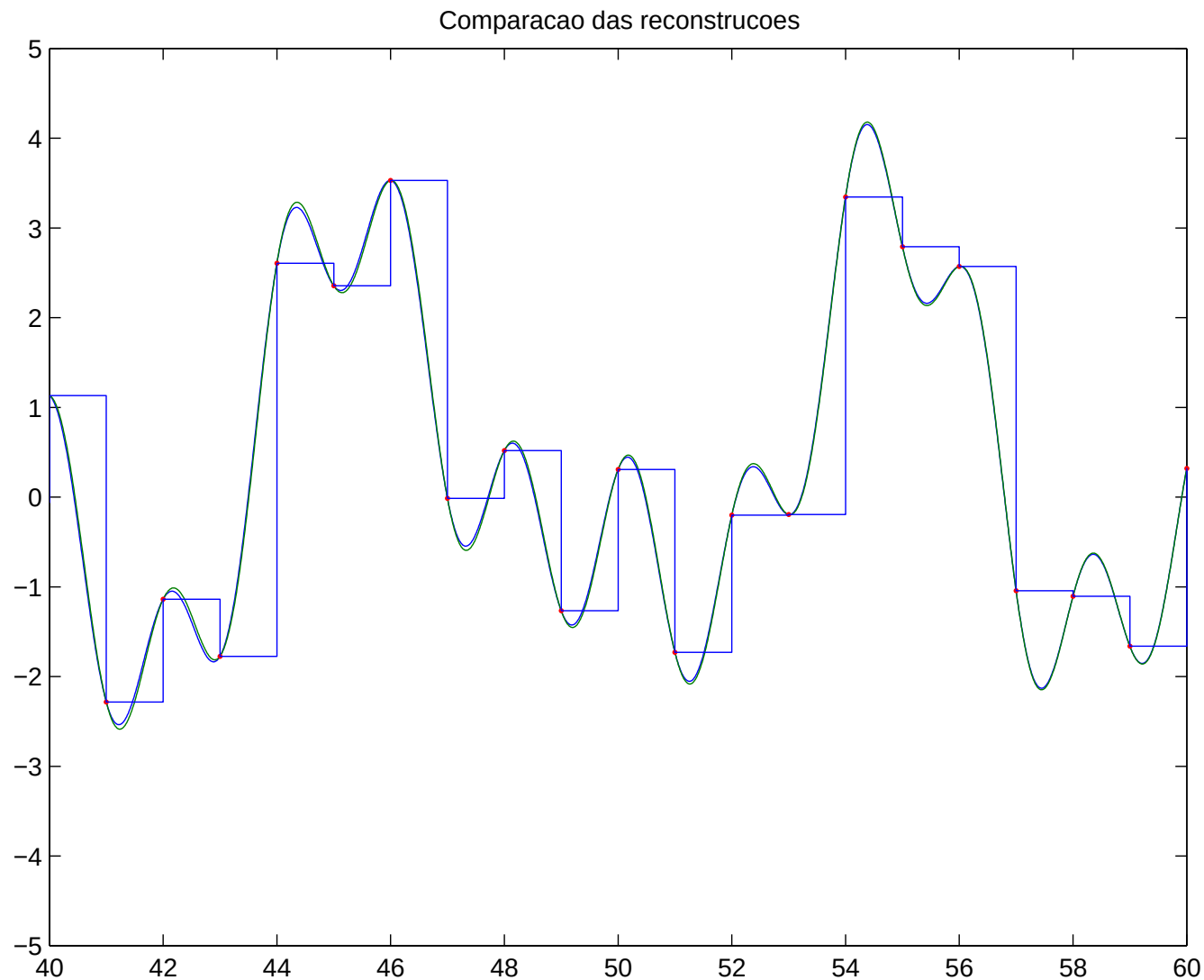


Figura 66: Detalhe da reconstrução usando fórmula de Shannon.

Aliasing

É um fenômeno relacionado à amostragem de sinais periódicos.

Filtro *anti-aliasing*

Para evitar o problema de *aliasing*, é necessário garantir que o sinal analógico (que será amostrado) tenha banda limitada.

Para tanto, introduz-se um Filtro Passa-Baixas antes do amostrador.

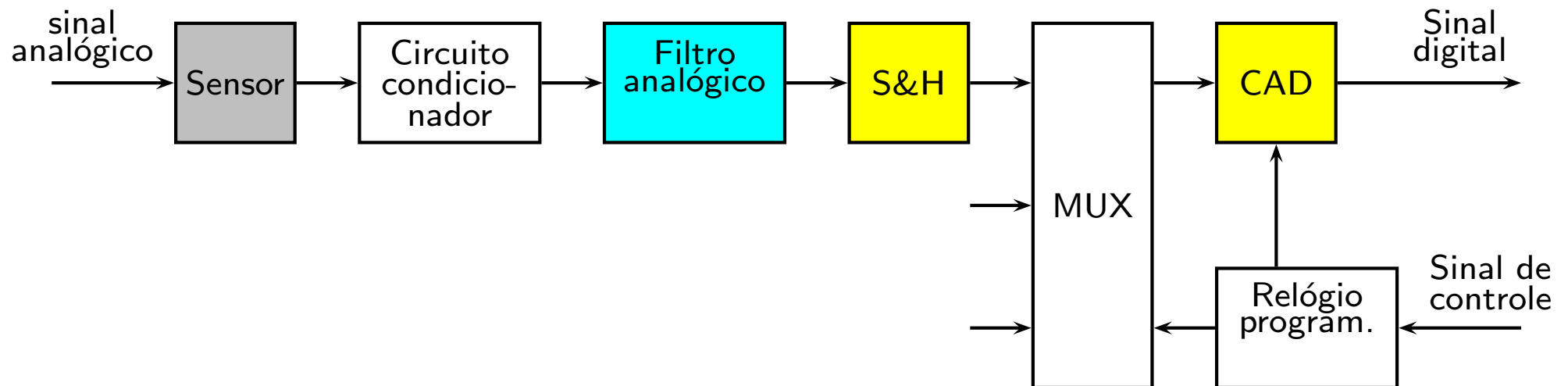


Figura 67: Sistema de aquisição de dados.



Figura 68: Tabela 7.1.

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 11

11 Revisão: Transformada de Laplace

Conteúdo

1. ...
2. ...
3. ...
4. Exemplos
5. Exercícios

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 12

12 Transformada Z

Conteúdo

1. Introdução
2. Origem da Transformada z
3. Definição
4. Generalização da Transformada de *Fourier*
5. Exemplos
6. Propriedades da Transformada z
7. Exemplos
8. Exercícios

12.1 Introdução

A transformada é uma ferramenta importante para a análise de sistemas lineares.

★ Contínuos (SLIT's) : Transformada de Laplace .

★ Discretos (SDLIT's) : Transformada z .

Nesta apresentação :

★ Origem a partir da Transformada de Laplace.

★ Generalização da Transformada de Fourier .

Vantagens em relação à Transformada de Fourier :

- A Transformada de Fourier **não converge** para todas as seqüências.
- Notação mais conveniente.
- Utilização para solução de **equações a diferenças** .

Origem da transformada z

Problema : Como usar a Transformada de Laplace com seqüências ?

Idéia : Substituir a seqüência por um trem de impulsos .

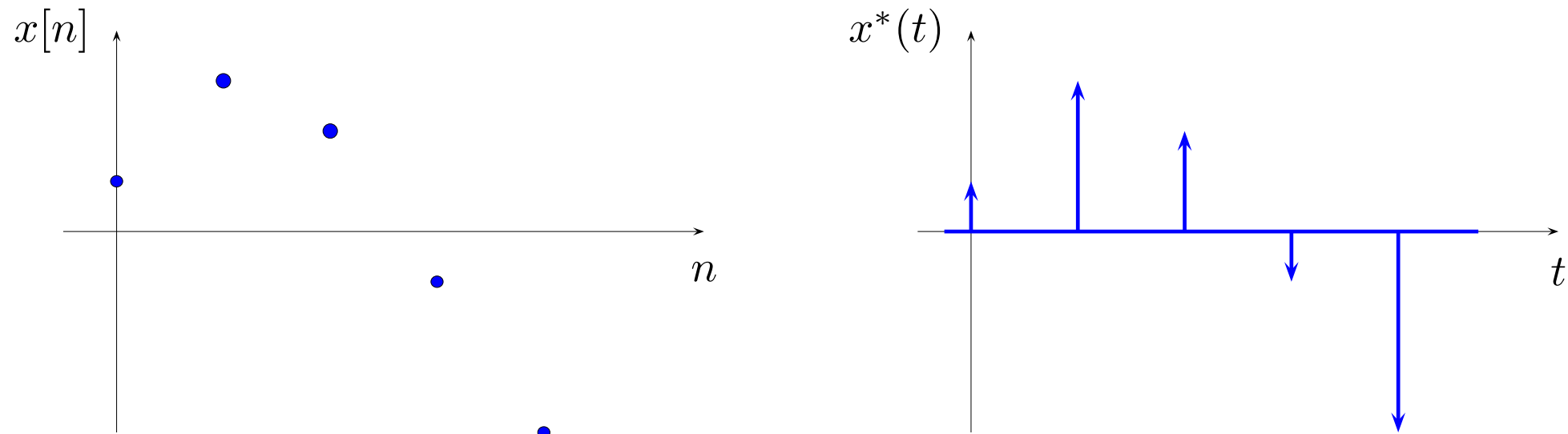


Figura 69: Modulação por impulsos.

Nota. A informação contida nas 2 representações é a mesma.

A função $x^*(t)$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned}x^*(t) &= x(0)\delta(t) + x(1)\delta(t - T) + x(2)\delta(t - 2T) + \dots \\&= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta(t - kT)\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace :

$$\begin{aligned}X^*(s) &= \mathcal{L}\{x^*(t)\} \\&= x(0) + x(1)e^{-sT} + x(2)e^{-s2T} + \dots \\&= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]e^{-skT}\end{aligned}$$

★ Qual é o problema ?

Problema : $X^*(s)$ não é uma função racional em s .

Solução : Introduzir uma nova variável complexa

$$z = e^{sh}$$

Como resultado obtém-se a seguinte transformada :

$$X^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

★ $X^*(z)$ é uma função contínua racional na variável complexa z .

Definição da Transformada z

Definição. *(Transformada z bilateral)*

A Transformada z de uma seqüência **duplamente-infinita** $x[n]$ é definida como :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

★ As seqüências tratadas no livro **A. Oppenheim & R. Schafer , 1989**, são **duplamente-infinitas** .

Definição. (*Transformada z unilateral*)

A Transformada z de uma seqüência **semi-infinita** à direita $x[n]$ é definida como :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

★ As seqüências tratadas no livro **Åström & Wittenmark , 1997**, são do tipo **semi-infinitas** à direita.

Nota. Se a sequência é tal que

$$\boxed{x[n] = 0}, \quad n < 0$$

então as 2 transformadas são **equivalentes**.

Comparação

Transformada de Fourier de $x[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Transformada de Laplace de $x^*(t)$:

$$X^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT) e^{-snT}$$

Transformada z de $x[n]$:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Notação :

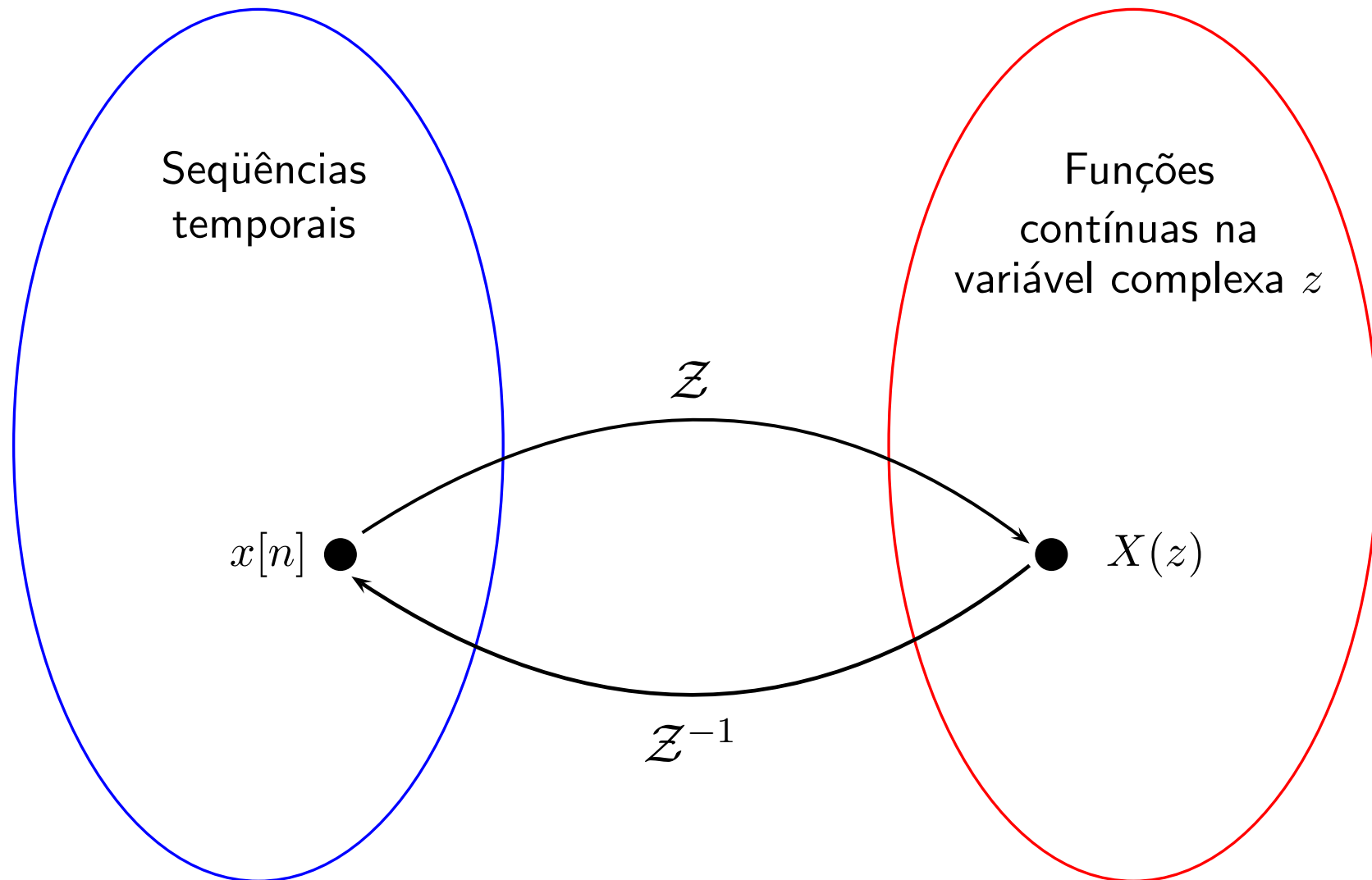
$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

$$X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x[n]$$

Interpretação :



Generalização da *Transformada de Fourier*

A variável complexa z pode ser escrita como :

$$z = r e^{j\omega}$$

Portanto :

$$\begin{aligned} X(r e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (r e^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] r^{-n}) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

- ★ A Transformada z de $x[n]$ pode ser interpretada como a Transformada de Fourier de $x[n] r^{-n}$.
- ★ r^{-n} é uma exponencial !

Nota. A Transformada de Fourier é uma particularização da Transformada z ,

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

i.e., é uma particularização para $r = 1$.

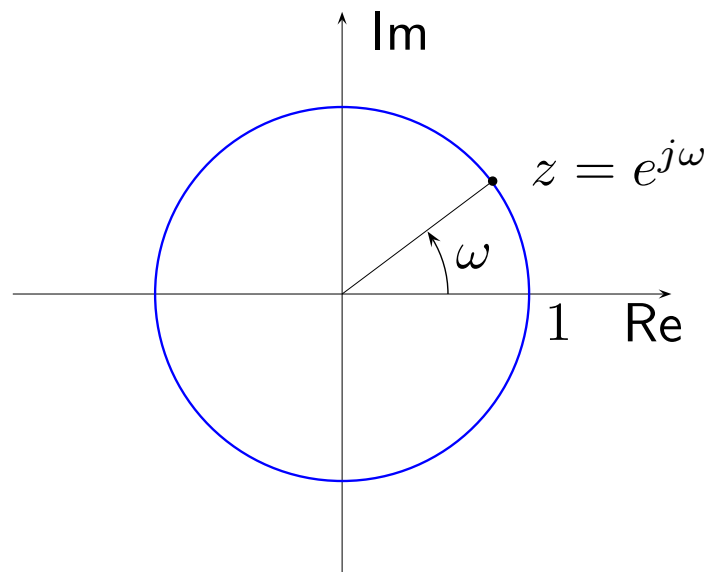


Figura 70: Círculo unitário no plano z .

Convergência

- ★ A Transformada de Fourier converge $\Leftrightarrow x[n]$ é absolutamente somável.
- ★ A Transformada de Fourier não converge para uma classe significativa de sinais.

Definição. Região de convergência

$$\text{ROC} = \left\{ z \mid \mathcal{Z}\{x[n]\} \text{ converge.} \right\}$$

★ Para que a Transformada z seja **convergente**, devemos ter

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] r^{-n}| < \infty$$

★ Basta que exista uma exponencial r^{-n} tal que $x[n] r^{-n}$ seja absolutamente somável.

Exemplo 1

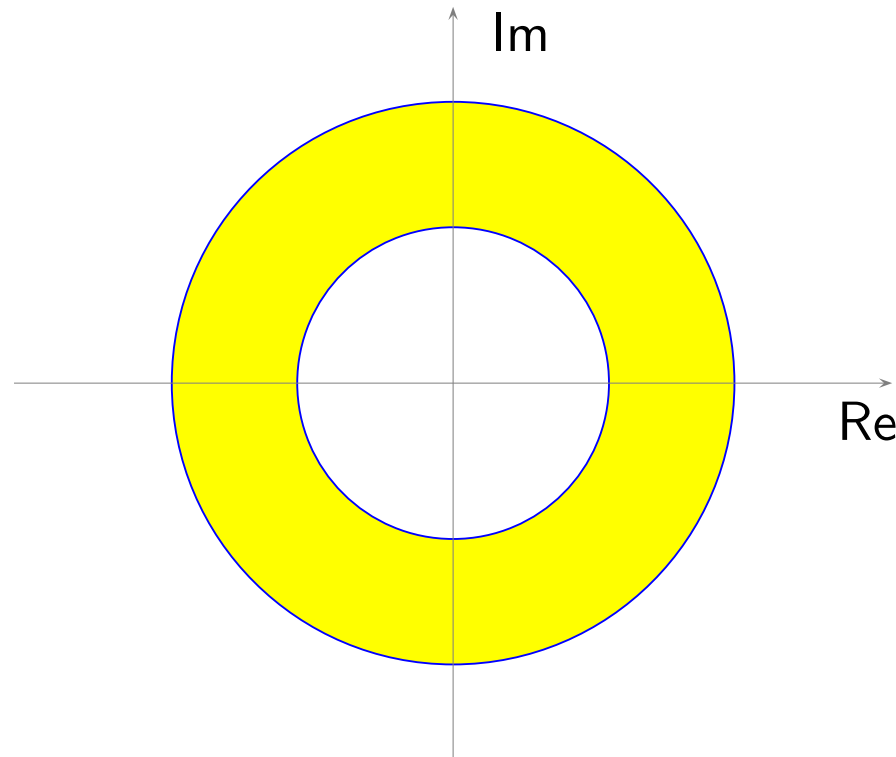
A seqüência $x[n] = \text{degrau unitário}$ não é absolutamente somável.

★ $x[n]r^{-n}$ é abs. somável para $r > 1$.

★ Quer dizer, existe uma Transformada z do degrau unitário com

$$\text{ROC} : |z| > 1.$$

Fato. A ROC é um **anel** no plano z centrado na origem.



★ Se o círculo unitário pertence ao anel, então a Transformada de Fourier também existe.

Nota. No caso de seqüências não absolutamente somáveis e não quadraticamente somáveis, a Transformada de Fourier é definida usando **impulsos**.

Para estes casos,

$$X(e^{j\omega}) \neq X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

★ A Transformada z é mais útil quando expressa em forma fechada .

Fórmula útil : A soma de uma PG é dada por :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}, \quad N_2 > N_1$$

Prova.

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \alpha^{N_1} + \alpha^{N_1+1} + \dots + \alpha^{N_2}$$

$$\alpha \sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \alpha^{N_1+1} + \dots + \alpha^{N_2} + \alpha^{N_2+1}$$

Subtraindo :

$$(1 - \alpha) \sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}$$

Portanto :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}$$

Exemplo 2 Pulso unitário

$$\text{Pulso unitário : } x[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Usando a definição :

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots = 1$$

Exemplo 3 Degrau unitário

Degrau unitário :
$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ 1 & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

Usando a definição :
$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Condição para convergência :

$$|z| > 1$$

Forma fechada :

$$X(z) = \frac{(z^{-1})^0 - (z^{-1})^\infty}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$$

★ Dentro da região de convergência, $(z^{-1})^\infty = 0$.

Solução :

$$X(z) = \frac{1}{z - 1}$$

ROC:

$$|z| > 1$$

Exemplo 4 Seqüência exponencial semi-infinita à direita.

Exponencial : $x[n] = a^n u[n]$

Usando a definição : $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$

Condição para convergência : $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \boxed{|z| > |a|}$

Nota. $(a^n) r^{-n} = \left(\frac{a}{r}\right)^n$ abs. somável $\Rightarrow |r| > |a| \Rightarrow |z| > |a|$.

Forma fechada :

$$X(z) = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

★ Dentro da região de convergência, $(az^{-1})^\infty = 0$.

Solução :

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

ROC:

$$|z| > |a|$$

Nota. Para $|a| > 1$ a Transformada de Fourier não converge.

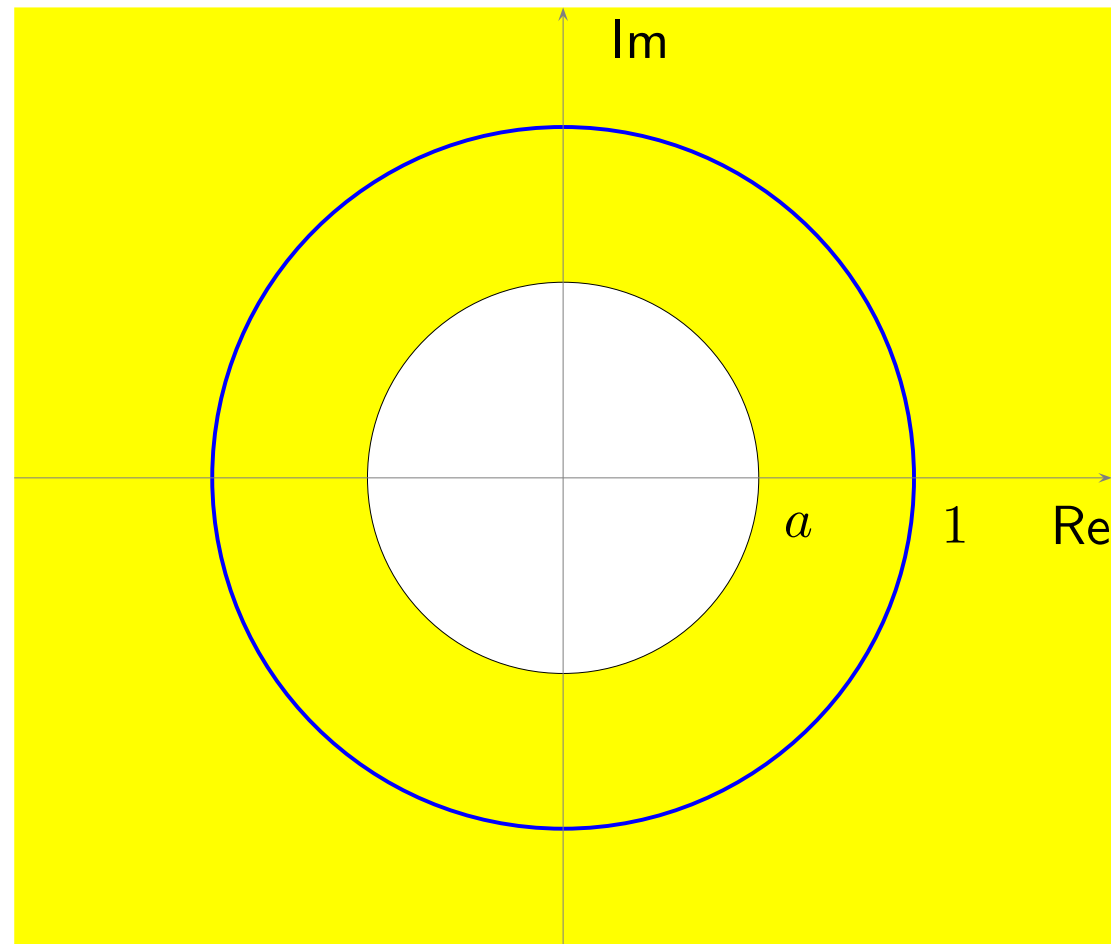


Figura 71: ROC com $|a| < 1$.

Exemplo 5 Seqüência exponencial semi-infinita à esquerda.

Exponencial : $x[n] = -a^n u[-n - 1], \quad x[n] = \begin{cases} -a^n & \text{se } n \leq -1 \\ 0 & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$

Usando a definição :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} z)^n \end{aligned}$$

Condição para convergência : $|a^{-1} z| < 1 \Rightarrow \boxed{|z| < |a|}$

Forma fechada :

$$X(z) = -\frac{(a^{-1}z)^1 - (a^{-1}z)^\infty}{1 - (a^{-1}z)} = \frac{-(a^{-1}z)}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a}$$

★ Dentro da região de convergência, $(a^{-1}z)^\infty = 0$.

Solução :

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

ROC:

$$|z| < |a|$$

Nota.

Para $|a| < 1$ a Transformada de Fourier não converge.

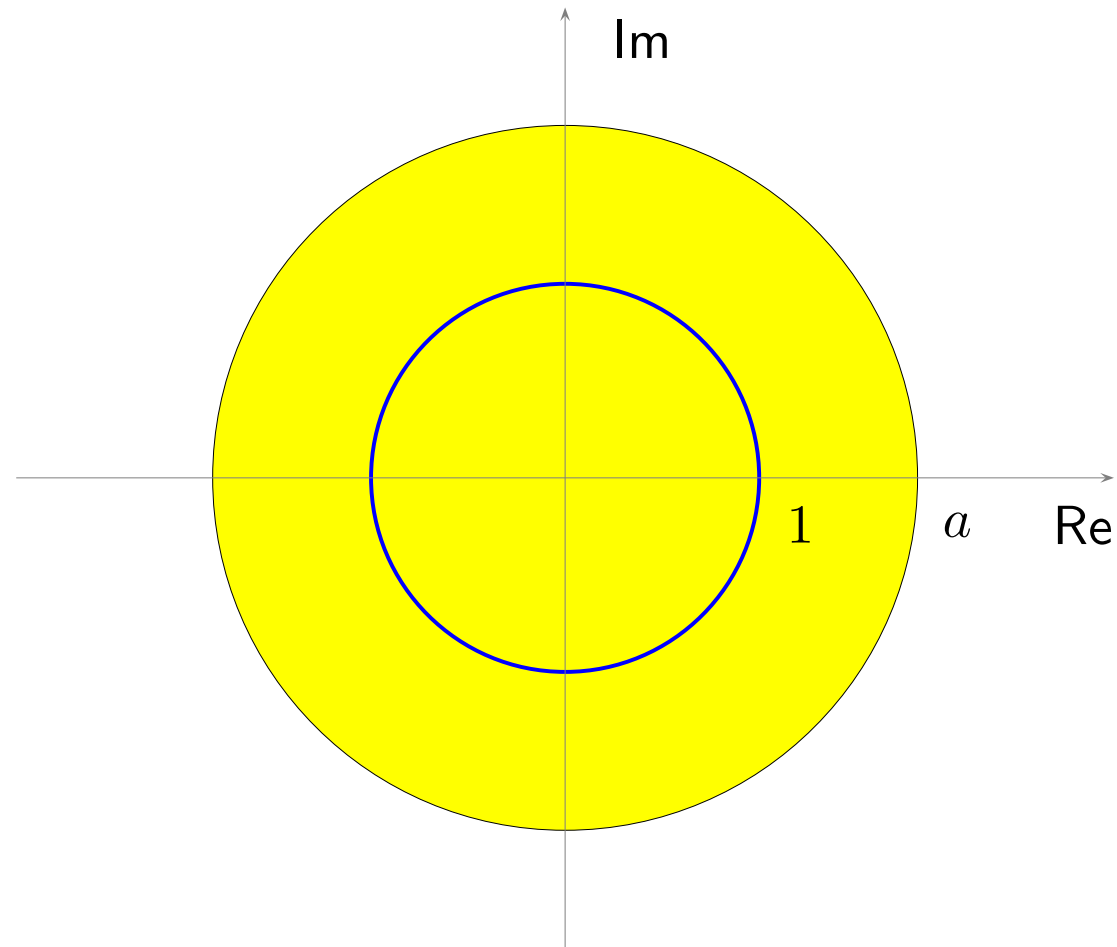


Figura 72: ROC com $|a| > 1$.

Exemplo 6

Seqüência exponencial duplamente-infinita.

(...)

Tabela de Transformada z mais comuns

Definição.

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

★ A tabela a seguir relaciona algumas das transformadas mais comuns

(Tabela 4.1, Oppenheim & Schaffer, 1989, pag. 159).

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $

8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Propriedades da região de convergência

★ A tabela a seguir relaciona as propriedades da ROC

(Veja Oppenheim & Schafer, 1989, pag. 160).

PROPERTY 1: The ROC is a ring or disk in the z -plane centered at the origin, i.e., $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

PROPERTY 2: The Fourier transform of $x[n]$ converges absolutely if and only if the ROC of the z -transform of $x[n]$ includes the unit circle.

PROPERTY 3: The ROC cannot contain any poles.

PROPERTY 4: If $x[n]$ is a *finite-duration sequence*, i.e., a sequence that is zero except in a finite interval $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, then the ROC is the entire z -plane except possibly $z = 0$ or $z = \infty$.

PROPERTY 5: If $x[n]$ is a *right-sided sequence*, i.e., a sequence that is zero for $n < N_1 < \infty$, the ROC extends outward from the *outermost* (i.e., largest magnitude) finite pole in $X(z)$ to (and possibly including) $z = \infty$.

PROPERTY 6: If $x[n]$ is a *left-sided sequence*, i.e., a sequence that is zero for $n > N_2 > -\infty$, the ROC extends inward from the *innermost* (smallest magnitude) nonzero pole in $X(z)$ to (and possibly including) $z = 0$.

PROPERTY 7: A *two-sided sequence* is an infinite-duration sequence that is neither right-sided nor left-sided. If $x[n]$ is a two-sided sequence, the ROC will consist of a ring in the z -plane, bounded on the interior and exterior by a pole, and, consistent with property 3, not containing any poles.

PROPERTY 8: The ROC must be a connected region.

Transformada z inversa

(...)

Propriedades da Transformada z

(...)

Exemplo 7

(...)

Exercício.

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 13

13 Análise de sistemas lineares discretos

Conteúdo

1. ...
2. ...
3. ...
4. Exemplos
5. Exercícios

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 14

14 Transformada de Fourier

Conteúdo

1. [Introdução](#)
2. ...
3. ...
4. Exemplos
5. Exercícios

14.1 Introdução

(...)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 15

15 Transformada discreta de Fourier (DFT)

Conteúdo

1. Revisão
2. Série discreta de *Fourier*
3. Propriedades da DSF
4. ...
5. Exemplos
6. Exercícios

Referências para este capítulo:

1. Oppenheim & Schafer,
Discrete-time signal processing,
Prentice Hall, 1989.
2. Paulo S. R. Diniz, Eduardo A. B. da Silva e Sergio L. Netto,
Digital signals processing: system analysis and design,
Cambridge University Press, 2002.
3. J. Proakis e D. Manolakis,
Digital Signal Processing,
Prentice Hall, 1996.

15.1 Revisão

Vamos iniciar fazendo uma breve revisão de *Transformada de Fourier* (vide seção 2.7 de (Oppenheim & Schaffer 1989), pag. 45.).

Equação de síntese:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Equação de análise:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Uma condição suficiente para a convergência é :

$$|X(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Algumas seqüências não são *absolutamente somáveis* mas são *quadraticamente somáveis* .

Exemplo 1 Seqüência *absolutamente somável*.

Exemplo 2 Seqüência *quadraticamente somável*.

Usando a teoria de *funções generalizadas*, defini-se a *Transformada de Fourier* de seqüências periódicas (não *absolutamente somáveis* nem *quadraticamente somáveis*) do tipo

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n} \quad \infty \leq n \leq \infty$$

como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$$

onde $\delta(\cdot)$ é a *função impulso* (com amplitude ∞).

Exemplo 3 A transformada de Fourier da seqüência

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall n$$

é

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) .$$

15.2 Série discreta de *Fourier* (DFS)

Seja uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ com período N .

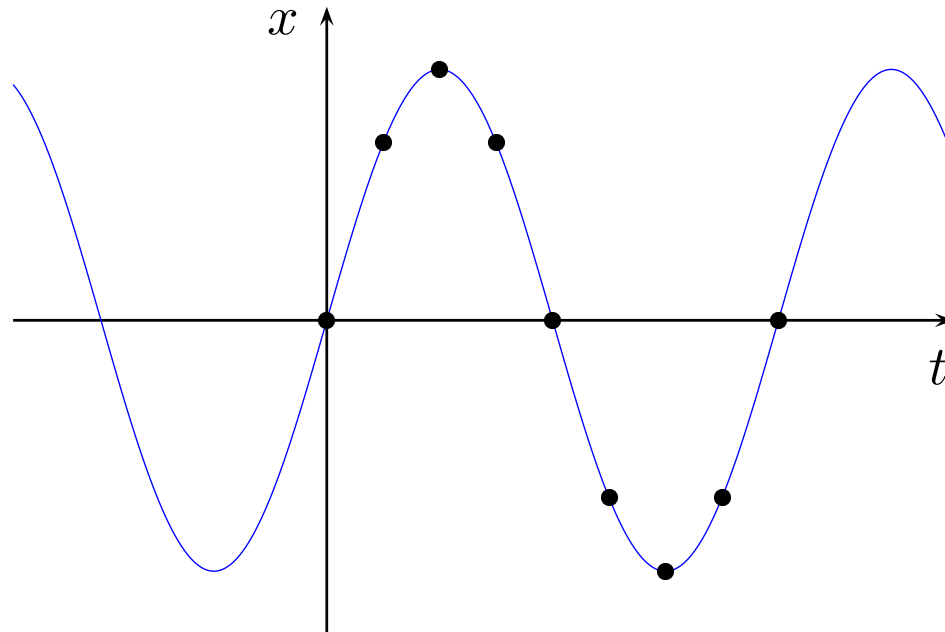
Propriedade de $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + N]$$

Nota. A notação $\tilde{x}$ indica sequência periódica.

Exemplo 4

Seja a seqüência periódica da figura.



$$N = 8$$

$$freq. = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$$

A expansão em série de *Fourier* de $\tilde{x}[n]$ é dada por

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j\omega_f kn}$$

onde :

★ $\omega_f = \frac{2\pi}{N}$ é a frequência fundamental.

★ A constante $\frac{1}{N}$ é introduzida por conveniência.

★ $\tilde{X}[k]$ são os coeficientes da expansão.

Importante : Note que

$$e_k[n] = e^{j\omega_f kn} = e^{j\omega_f (k+rN)n} = e_{k+rN}[n]$$

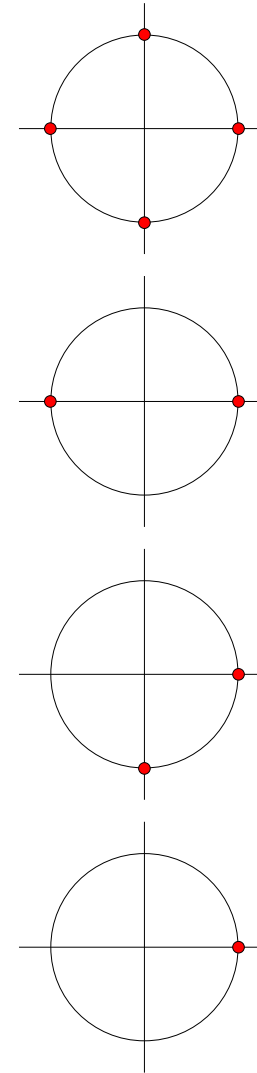
Exemplo 5 $N = 4$

$$e_1[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right) 1 n} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} = e_5[n]$$

$$e_2[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right) 2 n} = e^{j(\pi)n}$$

$$e_3[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right) 3 n} = e^{j\left(\frac{3\pi}{2}\right)n}$$

$$e_4[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right) 4 n} = e^{j(2\pi)n} = e_0[n]$$



Representação na forma de seqüências semi-infinitas :

$$e_0[n] = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$e_1[n] = \{1, j, -1, -j, \dots\}$$

$$e_2[n] = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$e_3[n] = \{1, -j, -1, j, \dots\}$$

$$e_4[n] = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$\vdots$$

Representação na forma **vetorial** :

$$e_0[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_1[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix}, \quad e_2[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_3[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix},$$

$$e_4[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Conclusão : Somente são necessárias N exponenciais complexas (harmônicas) para a representação em série de *Fourier* da seqüência periódica $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\omega_f kn}$$

★ Está é a equação de síntese .

Determinação dos coeficientes

Para obter os coeficientes $\tilde{X}[k]$ da série, exploramos a ortogonalidade das exponenciais complexas.

★ Verificação através de um exemplo simples.

Exemplo 6Verificação da ortogonalidade para o caso $N = 4$.

$$e_0[n] = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$e_1[n] = \{1, j, -1, -j, \dots\}$$

$$e_2[n] = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$e_3[n] = \{1, -j, -1, j, \dots\}$$

Fato. Duas seqüências $e_i[n]$ e $e_j[n]$ são ortogonais quando

$$\langle e_i[n], e_j[n] \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} e_i[k] e_j^*[k] = \begin{cases} N & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Nota. Lembrar que estamos trabalhando com números complexos, portanto, para $x, y \in \mathbb{C}^N$,

$$\langle x, y \rangle = x^{*T} y = x^H y = y^H x$$

Portanto :

$$\langle e_0, e_0 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\langle e_0, e_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^T = 1 + j - 1 - j = 0$$

$$\langle e_0, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\langle e_0, e_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^T = 1 - j - 1 + j = 0$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^T = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = 1 + j - 1 - j = 0$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^T = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^T = 1 + j - 1 - j = 0$$

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^T = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

★ Note que $\left\{ \frac{e_0}{N}, \frac{e_1}{N}, \frac{e_2}{N}, \frac{e_3}{N} \right\}$ forma uma **base ortonormal**.

Neste exemplo,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \left(\tilde{X}[0]e_0[n] + \tilde{X}[1]e_1[n] + \tilde{X}[2]e_2[n] + \tilde{X}[3]e_3[n] \right)$$

Multiplicando ambos os lados por $e_0^H[n]$ (e utilizando notação vetorial para simplificar) :

$$e_0^H[n]\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \left(\tilde{X}[0] \underbrace{e_0^H[n]e_0[n]}_N \right)$$

ou melhor,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)0n} = \tilde{X}[0]$$

★ Note o sinal (−) devido à conjugação.

A obtenção do coeficiente $\tilde{X}[1]$ é similar :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)1n} = \tilde{X}[1]$$

Pode-se verificar facilmente que a fórmula geral para se obter a seqüência $\tilde{X}[k]$ é :

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

Interpretação

Os coeficientes $\tilde{X}[k]$ podem ser interpretados como

- Seqüência de comprimento finito ($k = 0, \dots, N - 1$), ou
- Seqüência periódica definida para todo ($k \in \mathbb{Z}$).

É usual definir-se o valor complexo

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = e^{-j\omega_f}$$

Dessa forma :

Equação de síntese :

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

Equação de análise :

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

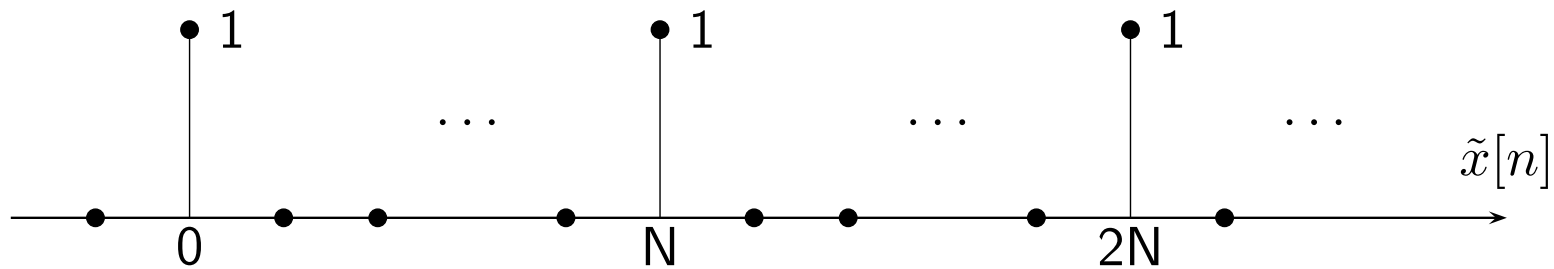
Notação

Vamos indicar a relação entre as seqüências periódicas $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{X}[k]$ pela seguinte notação :

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k]$$

Exemplo 7 Seja a seqüência periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rN]$$



Os coeficientes da DFS são :

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{-kn} = 1$$

Portanto,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

No caso $N = 4$ (e usando notação vetorial) :

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{4} \left(\tilde{X}[0]e_0[n] + \tilde{X}[1]e_1[n] + \tilde{X}[2]e_2[n] + \tilde{X}[3]e_3[n] \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} \right)\end{aligned}$$

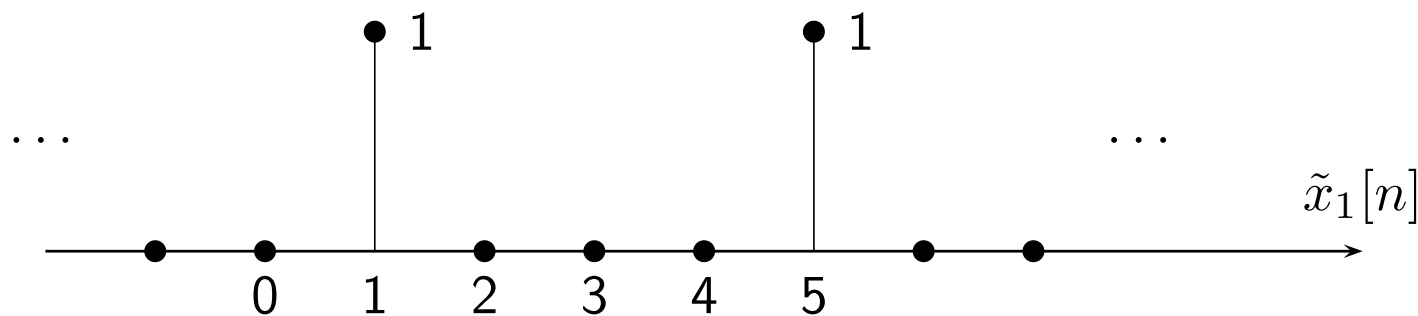
Portanto,

$$\tilde{x}[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{DFS} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{X}[k]$$

Exemplo 8 Seja $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n - 1]$.

$\tilde{x}[n]$ é o trem de impulsos do exemplo anterior.

Por simplicidade, vamos tomar novamente $N = 4$.



Os coeficientes $\tilde{X}_1[k]$ são dados por :

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n-1] W_4^{kn} = W_4^k = e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)k} = e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)k}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_1[k] = \{1, -j, -1, j, \dots\}$$

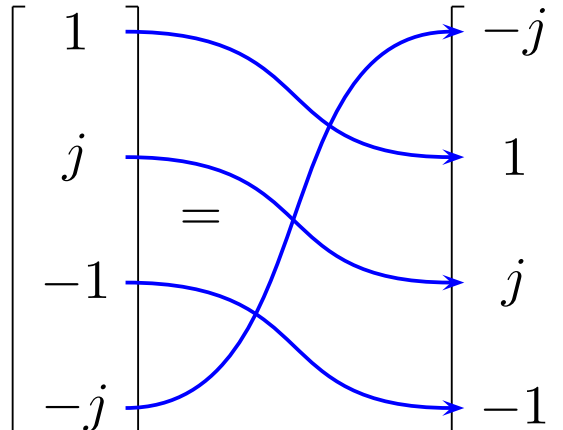
Portanto,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{4} (1 e_0[n] + (-j) e_1[n] + (-1) e_2[n] + j e_3[n])$$

Verificação (usando notação vetorial) :

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{4} \left(1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-j) \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j \\ 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ 1 \\ -j \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe o rodízio nos vetores :

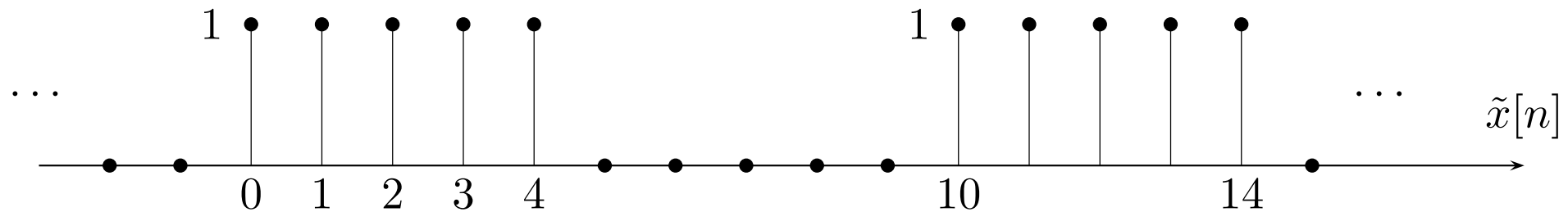
$$-j e_1 = -j \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix}$$


★ Esse rodízio pode ser observado em todos os vetores.

Resultado,

$$\tilde{x}_1[n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{DFS} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} = \tilde{X}_1[k]$$

Exemplo 9 Seja a seqüência da figura abaixo.



O período é $N = 10$.

Os coeficientes da expansão são dados por :

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)kn}$$

A expressão para os coeficientes pode ser reescrita como :

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j\left(\frac{4\pi}{10}\right)k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)}$$

Portanto :

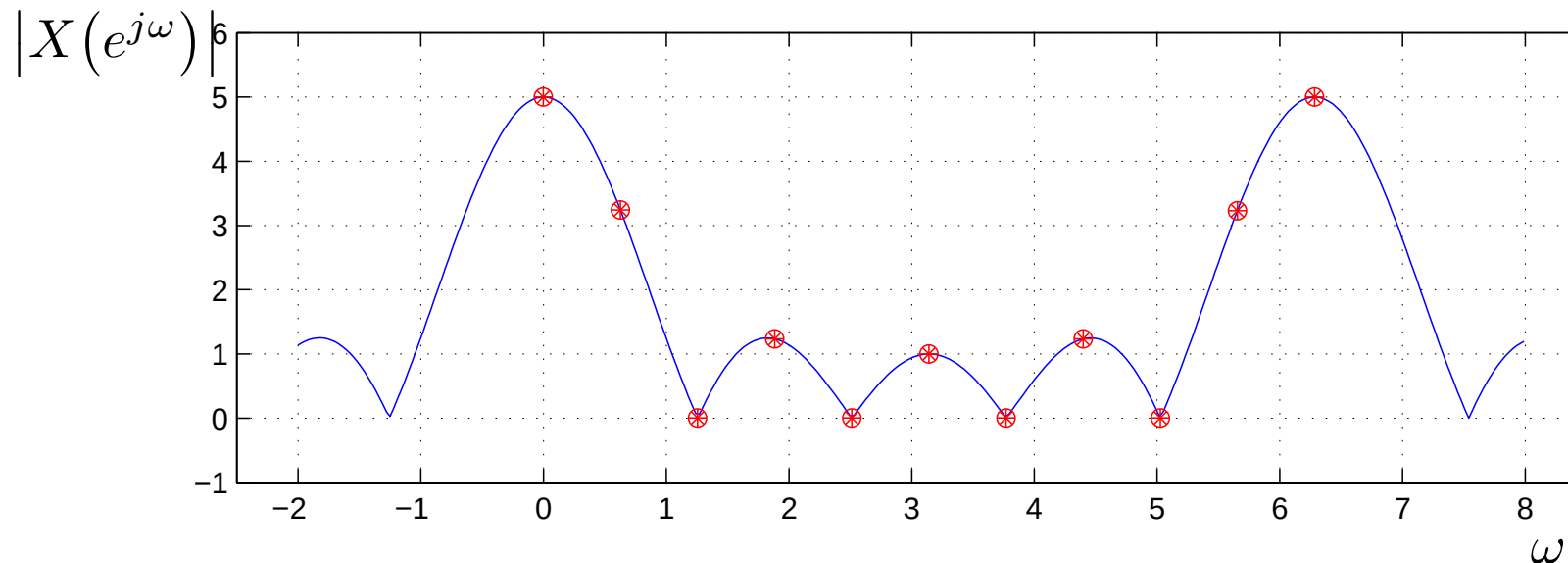
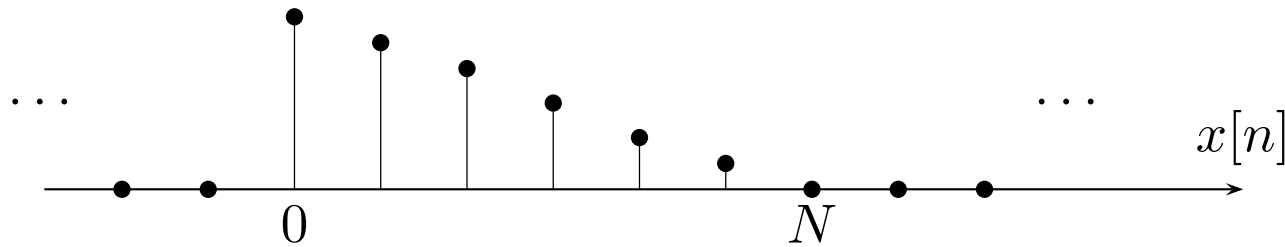


Figura 73: Módulo de $\tilde{X}[k]$.

Vamos denotar por $x[n]$ a seqüência (aperiódica) correspondente a um período de $\tilde{x}[n]$:



Ou melhor,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{se } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $x[n] = \tilde{x}[n]$ no intervalo $(0 \leq n \leq N - 1)$, temos que a *Transformada de Fourier* de $x[n]$ é dada por :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\omega n}$$

Comparando-se esta expressão com a equação de análise

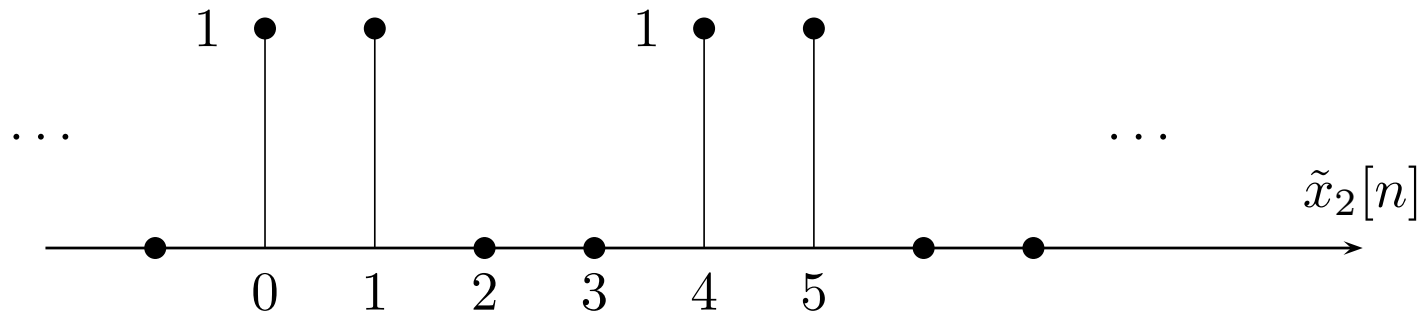
$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

concluimos que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} k}$$

★ Isto corresponde a amostrar a *Transformada de Fourier* em N frequências entre $\omega = 0$ e $\omega = 2\pi$ com espaçamento de $\frac{2\pi}{N}$.

Exemplo 10 Seja a seqüência periódica



Note que :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[n] &= \tilde{x}[n] + \tilde{x}[n-1] \\ &= \tilde{x}[n] + \tilde{x}_1[n-1]\end{aligned}$$

onde $\tilde{x}[n]$ é a seqüência do exemplo 7 e

$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-1]$ foi analisada no exemplo 8.

Neste exemplo,

$$\tilde{X}_2 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}_2[n] W_4^{kn} = \sum_{n=0}^1 W_4^{kn} = 1 + W_4^k$$

Portanto,

$$\tilde{X}_2[k] = \tilde{X}[k] + \tilde{X}_1[k] = 1 + W_4^k = 1 + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)k}$$

Usando notação vetorial, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2[n] &= \frac{1}{4} (2 e_0[n] + (1 - j) e_1[n] + (0) e_2[n] + (1 + j) e_3[n]) \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1 - j) \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (1 + j) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resultado,

$$\tilde{x}_2[n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{DFS} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - j \\ 0 \\ 1 + j \end{bmatrix} = \tilde{X}_2[k]$$

15.3 Propriedades da DFS

Linearidade

Se

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1[n] &\xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_1[k] \\ \tilde{x}_2[n] &\xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_2[k]\end{aligned}$$

Então :

$$\alpha_1 \tilde{x}_1[n] + \alpha_2 \tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{DFS} \alpha_1 \tilde{X}_1[k] + \alpha_2 \tilde{X}_2[k]$$

Nota.

$\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$ têm o mesmo período N .

Shift

Se $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k]$

Então :

$$\tilde{x}[n - m] \xleftrightarrow{DFS} W_N^{km} \tilde{X}[k]$$

Da mesma forma, devido à dualidade entre $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{X}[k]$, tem-se que

$$W_N^{-ln} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k - l]$$

Dualidade

★ Seqüência aperiódica $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ função periódica

★ Seqüência periódica $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ função periódica

★ As únicas diferenças entre as equações de síntese e análise são :

- O fator $\frac{1}{N}$ na equação de síntese.
- O expoente negativo na equação de síntese.

Portanto, podemos reescrever a equação de síntese

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

como (trocando n por $-n$)

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{kn}$$

Fazendo-se a troca de n por k :

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk}$$

A equação anterior

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk}$$

é semelhante à equação de análise

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{kn}$$

Conclusão :

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{DFS} N\tilde{x}[-k]$$

isto é, os coeficientes da DFS da seqüência periódica $\tilde{X}[n]$ são dados por $N\tilde{x}[-k]$.

Convolução periódica

Se

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1[n] &\xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_1[k] \\ \tilde{x}_2[n] &\xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_2[k]\end{aligned}$$

Então :

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$$

- ★ O produto das funções no domínio da frequência corresponde à convolução das funções no domínio do tempo.
- ★ Como as seqüências envolvidas têm período N , a convolução é feita somente em um período, daí o nome de **convolução periódica**.

15.4 *Transformada discreta de Fourier* (DFT)

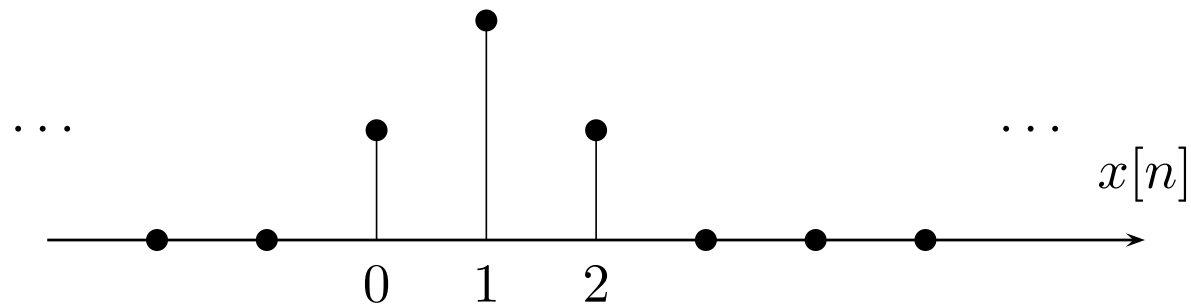
Vamos considerar uma seqüência finita $x[n]$ com comprimento N .

Propriedade :

$$x[n] = 0, \quad \text{se } n \notin [0, N - 1]$$

Exemplo 11

Seqüência finita



★ Esta é uma seqüência de comprimento $N > 3$.

★ Sempre é possível associar uma seqüência periódica $\tilde{x}[n]$ à seqüência aperiódica $x[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

Notação alternativa :

$$\tilde{x}[n] = x[(n \text{ módulo } N)]$$

ou ainda

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$$

★ Também podemos recuperar a seqüência finita original $x[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{se } n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Lembrando que

$$\underbrace{\tilde{x}[n]}_{\text{Período } N} \xleftrightarrow{DFS} \underbrace{\tilde{X}[k]}_{\text{Período } N}$$

Definição.

Transformada discreta de Fourier (DFT)

$$x[n] \xleftrightarrow{DFS} X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & \text{se } k \in [0, N-1] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação :

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ módulo } N)] = X[(k)_N]$$

Portanto, as equações de síntese e análise da DFT são :

Equação de síntese:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

Equação de análise:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Notação :

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

Exemplo 12

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
EE Escola de Engenharia
DEL Departamento de Eletrônica

EEL-555 Sistemas Lineares II

Capítulo # 16

16 Fast Fourier Transform (FFT)

Conteúdo

1. ...
2. ...
3. ...
4. Exemplos
5. Exercícios

Referências para este capítulo:

1. Gilbert Strang,
Linear algebra and its applications,
Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1988.
2. J. Proakis e D. Manolakis,
Digital Signal Processing,
Prentice Hall, 1996.

16.1 Forma matricial da DFT

(...)

Exemplo 1

$$N = 4$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Portanto,

$$X[0] = x[0] W_4^0 + x[1] W_4^0 + x[2] W_4^0 + x[3] W_4^0$$

$$X[1] = x[0] W_4^0 + x[1] W_4^1 + x[2] W_4^2 + x[3] W_4^3$$

$$X[2] = x[0] W_4^0 + x[1] W_4^2 + x[2] W_4^4 + x[3] W_4^6$$

$$X[3] = x[0] W_4^0 + x[1] W_4^3 + x[2] W_4^6 + x[3] W_4^9$$

Como a DFT é uma transformação linear, então existe uma **representação matricial**.

Usando notação vetorial, podemos escrever

$$X[k] = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} x[n]$$

Ou melhor,

$$\boxed{X[k] = F x[n]}, \quad F = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}$$

Porém,

$$W_4^0 = 1$$

$$W_4^4 = W_4^0 = 1$$

$$W_4^6 = W_4^2$$

$$W_4^9 = W_4^1$$

Então,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & 1 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

Propiedades de F :

- $F = F^T$
- Inversa simples.
- ...

Fato A inversa da matriz F é dada por

$$F^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ 1 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ 1 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{bmatrix}$$

Verificação :

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$F F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} = I$$

Notação

É usual denotar

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

Assim,

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi/3} & e^{4\pi/3} \\ 1 & e^{4\pi/3} & e^{8\pi/3} \end{bmatrix}$$

Idéia : Calcular $X[k] = F_4 x[n]$ utilizando F_2 .

$$X[k] = F_4 x[n] \quad \rightarrow \quad \dots \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$$

(...)

Resultado *Cooley & Tukey, 1965*

$$x[n] \rightarrow \begin{bmatrix} x'[n] \\ x''[n] \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X'[k] = F_{N/2} x'[n] \\ X''[k] = F_{N/2} x''[n] \end{cases}$$

$$X[k] = X'[k] + W_N^k X''[k] \quad (k = 0, \dots, N/2 - 1)$$

$$X[k + N/2 - 1] = X'[k] - W_N^k X''[k] \quad (k = 0, \dots, N/2 - 1)$$

Exemplo 2 $N = 4$

(...)

16.2 Diagrama *Butterfly*

(...)

Referências

Oppenheim, A. V. & Schafer, R. W. (1989), *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

C. T. Chen (1999), *Linear Systems Theory and Design*, 3rd edn, Oxford.

William L. Brogan (1991), *Modern Control Theory*, 3rd edn, Prentice Hall.

Slotine, J. J. E. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, Inc.

Strang, G. (1988), *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.