1. Em 1900, como parte do 16^o problema da sua famosa lista, Hilbert elaborou a seguinte questão:

Qual é o número de ciclos limites (órbitas periódicas isoladas) de um sistema de equações diferenciais polinomiais no plano?

Embora este problema permaneça sem solução, ele tem uma história bem interessante. Um dos primeiros resultados foi o “teorema de Dulac” que afirmava ser esse número finito, sem estabelecer um limite específico. Recentemente, no entanto, revelou-se que havia um “furo” na sua prova.

Os sistemas quadráticos, primeiro caso não trivial do problema de Hilbert, foram intensivamente estudados. Nos anos 50, Petrovskii & Landis declararam que o número de ciclos limites de sistemas quadráticos era 3. Infelizmente, seus artigos, embora influentes, estavam repletos de erros. Em 1980, dois pesquisadores, Shi Song-ling e Wang Mingshu resolveram o mistério independentemente. Eles produziram um exemplo de sistema quadrático com pelo menos 4 ciclos limites. Mais recentemente, o teorema de Dulac foi parcialmente “consertado” por Bamon. No caso de sistemas quadráticos, o número de ciclos limites é realmente finito. Para o caso de sistemas polinomiais mais gerais, mesmo a questão da finitude do número de ciclos limites continua sem solução.

Yeh mostrou que o sistema quadrático abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P \cos(a) - Q \sin(a), \\ \dot{x}_2 &= P \sin(a) + Q \cos(a),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}P &= 169(x_1 - 1)^2 - 16(x_2 - 1)^2 - 153, \\ Q &= 144(x_1 - 1)^2 - 9(x_2 - 1)^2 - 135,\end{aligned}$$

tem exatamente 2 ciclos limites: 1 estável em torno do ponto (0, 0) e outro instável em torno do ponto (2, 2).

Trabalho: Resolver numericamente o sistema quadrático acima e determinar os seus 2 ciclos limites.

Utilize os seguintes métodos :

- Método de **Euler**.
- Método **Mid-point**.
- Método clássico de **Runge-Kutta**.
- Método de **Adams-Bashforth**.
- Método de **Adams-Moulton**.

Dica: Para a determinação do ciclo limite instável a simulação deve ser feita com a variável independente (tempo) evoluindo no sentido negativo. Em outras palavras, a simulação deve ser feita “de trás-para-frente”.

2. Resolver numericamente o sistema quadrático abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_2 - 10x_1^2 + (5 + b)x_1x_2 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 + (8c - 25 - 9b)x_1x_2.\end{aligned}$$

Shi Song-ling mostrou que para os parâmetros $a = -10^{-200}$, $b = -10^{-13}$ e $c = -10^{-52}$ o sistema quadrático acima tem pelo menos 4 ciclos limites.

É muito difícil obter gráficos desses ciclos limites usando simulação numérica devido às grandes variações nas magnitudes dos coeficientes. Os parâmetros acima foram escolhidos especificamente para viabilizar a demonstração do resultado.

É possível que exista um subconjunto mais “razoável” de parâmetros para os quais ainda existam os 4 ciclos limites.

Trabalho: Escolher parâmetros para o sistema quadrático acima e tentar determinar os seus 4 ciclos limites.

Para este problema utilize :

- Método de **Runge-Kutta**.

3. Considere o seguinte modelo de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

onde u é um sinal externo de excitação.

Trabalho: Desenvolva um programa para resolver numericamente o sistema acima.

Utilize os seguintes métodos :

- Método de **Euler**.
- Método **Mid-point**.
- Método clássico de **Runge-Kutta**.
- Método de **Adams-Bashforth**.
- Método de **Adams-Moulton**.

O programa deve ser capaz de resolver sistemas de ordem arbitrária.

Para cada caso, mostre os resultados obtidos com pelo menos 2 sistemas de ordens diferentes.

Referências

- [1] Hüseyin Koçak, *Differential and difference equations through computer experiments*, Springer-Verlag, 1986.